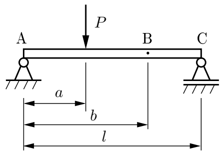
Tutorium

Aufgabe 13

Für den durch eine Einzelkraft P belasteten skizzierten Balken ist die Lagerkraft im Punkt C sowie das Schnittmoment im Punkt B mit dem Prinzip der virtuellen Verrückungen zu bestimmen.

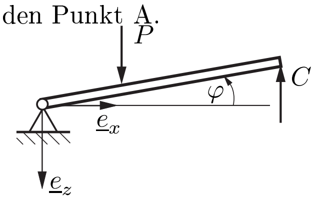
Geg.: P, l, a, b



Der ausführliche Lösungsweg

1. Lagerkraft im Punkt C:

   Die gesuchte unbekannte Lagerkraft wird sichtbar gemacht. Der dadurch entstehende Pseudofreiheitsgrad ermöglicht eine gedachte Drehung des starren Balkens um den Punkt A.



   Ortsvektoren:

$$\underline{r}_P = a\cos\varphi\underline{e}_x - a\sin\varphi\underline{e}_z \tag{1}$$
$$\underline{r}_C = l\cos\varphi\underline{e}_x - l\sin\varphi\underline{e}_z \tag{2}$$

   Variation:

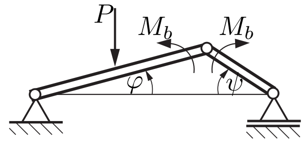
$$\delta\underline{r}_C = -\,l\sin\varphi|_{\varphi=0}\delta\varphi\underline{e}_x - l\cos\varphi|_{\varphi=0}\delta\varphi\underline{e}_z \tag{3}$$
$$= \underline{\underline{-l\delta\varphi\underline{e}_z}} \tag{4}$$
$$\delta\underline{r}_P = -\,a\sin\varphi|_{\varphi=0}\delta\varphi\underline{e}_x - a\cos\varphi|_{\varphi=0}\delta\varphi\underline{e}_z \tag{5}$$
$$= \underline{\underline{-a\delta\varphi\underline{e}_z}} \tag{6}$$

   Prinzip der virtuellen Verrückungen:

$$\delta W = \underline{P}\cdot\delta\underline{r}_P + \underline{C}\cdot\delta\underline{r}_C = 0 \tag{7}$$
$$(-Pa + Cl)\delta\varphi = 0 \Rightarrow \underline{\underline{C = P\frac{a}{l}}} \tag{8}$$

2. Schnittmoment an der Stelle $x = b$:

   Da im Prinzip der virtuellen Verrückungen nur das gesuchte Schnittmoment als unbekannte Größe auftauchen soll, wird das System derart kinematisch gemacht, daß ein Gelenk an der Stelle $x = b$ eingebaut wird. Nach einem Freischnitt am Gelenk treten entsprechend dem dritten Newtonschen Grundgesetz sowohl in horizontaler als auch vertikaler Richtung Zwangskräfte und zugehörige Reaktionkräfte auf. Da die Kräfte in entgegengesetzte Richtungen weisen, aber an der selben gedachten Verschiebung ´´arbeiten´´, addieren sich ihre Anteile an der virtuellen Arbeit zu Null. Die Schnittmomente hingegen drehen zwar entgegengesetzt, die zugehörigen Winkelverdrehungen der Systemteile jedoch auch und sind zudem noch ungleich.



Kinematische Beziehung:

Da das System lediglich einen Freiheitsgrad hat, müssen φ und ψ abhängig voneinander sein. Diese Abhängigkeit kann über die Vertikalverschiebung des Gelenkes bestimmt werden:

$$b\sin\varphi = (l-b)\sin\psi \tag{9}$$

Variation der Gleichung führt auf:

$$b\cos\varphi|_{\varphi=0}\delta\varphi = (l-b)\cos\psi|_{\psi=0}\delta\psi \tag{10}$$
$$\Rightarrow \underline{\underline{\delta\psi = \frac{b}{l-b}\delta\varphi}} \tag{11}$$

Prinzip der virtuellen Verrückungen:

$$\delta W = \underline{P}\cdot\delta\underline{r}_P + M_b\underline{e}_y\cdot\delta\underline{\varphi} + (-M_b\underline{e}_y)\cdot\delta\underline{\psi} = 0 \tag{12}$$
$$(-Pa + M_b + M_b\frac{b}{l-b})\delta\varphi = 0 \tag{13}$$
$$(\delta\varphi \neq 0) \Rightarrow \underline{\underline{M_b = P\frac{a}{l}(l-b)}} \tag{14}$$

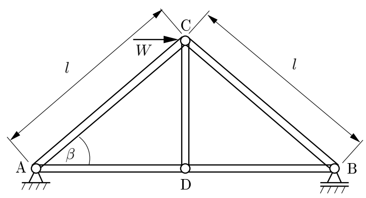
Aufgabe 15

Für das aus starren Stäben bestehende skizzierte Fachwerk unter der Belastung W sind folgende Größen mit dem Prinzip der virtuellen Verrückungen zu bestimmen:

(a) Die Auflagerkraft im Punkt B,

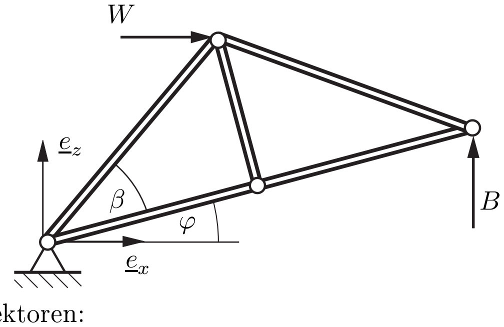
(b) die Stabkraft S_{BC}.

Geg.: W, l, β



(a) Auflagerkraft B:

Bei komplizierteren Systemen, bei denen die virtuellen Verrückungen der Kraftangriffspunkte nicht sofort ersichtlich sind (bzw. deren Komponenten), ist es einfacher, die einzelnen Ortsvektoren vom Drehpunkt zu den Kraftangriffspunkten in der verschobenen Lage aufzustellen und zu variieren.



Ortsvektoren:

$$\underline{r}_W = l\cos(\varphi+\beta)\underline{e}_x + l\sin(\varphi+\beta)\underline{e}_z \tag{15}$$
$$\underline{r}_B = 2l\cos\varphi\cos\beta\underline{e}_x + 2l\sin\varphi\cos\beta\underline{e}_z \tag{16}$$

Variation:

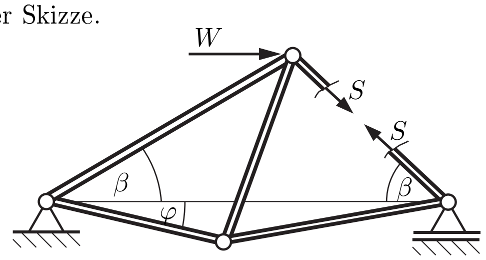
$$\delta \underline{r}_W = -\,l\sin(\varphi+\beta)|_{\varphi=0}\delta\varphi\underline{e}_x + l\cos(\varphi+\beta)|_{\varphi=0}\delta\varphi\underline{e}_z$$
$$= -l\sin\beta\delta\varphi\underline{e}_x + l\cos\beta\delta\varphi\underline{e}_z \qquad (17)$$
$$\delta \underline{r}_B = -\,2l\cos\beta\sin\varphi|_{\varphi=0}\delta\varphi\underline{e}_x + 2l\cos\beta\cos\varphi|_{\varphi=0}\delta\varphi\underline{e}_z$$
$$= 2l\cos\beta\delta\varphi\underline{e}_z \qquad (18)$$

Prinzip der virtuellen Verrückungen:

$$\delta A = \underline{W}\cdot\delta\underline{r}_W + \underline{B}\cdot\delta\underline{r}_B = 0 \qquad (19)$$
$$(-Wl\sin\beta + 2Bl\cos\beta)\delta\varphi = 0 \qquad (20)$$
$$(\delta\varphi \neq 0) \Rightarrow B = \frac{W}{2}\tan\beta \qquad (21)$$

(b) Stabkraft S_{BC}:

Die gedachte Verschiebung an der die freigemachte gesuchte Stabkraft virtuelle Arbeit verrichtet, entnehme man der Skizze.



Ortsvektoren:

$$\underline{r}_W = l\cos(\beta-\varphi)\underline{e}_x + l\sin(\beta-\varphi)\underline{e}_z \qquad (22)$$
$$\underline{r}_B = 2l\cos\varphi\cos\beta\underline{e}_x \qquad (23)$$

Variation:

$$\delta\underline{r}_W = l\sin(\beta-\varphi)|_{\varphi=0}\delta\varphi\underline{e}_x - l\cos(\beta-\varphi)|_{\varphi=0}\delta\varphi\underline{e}_z$$
$$= l\sin\beta\delta\varphi\underline{e}_x - l\cos\beta\delta\varphi\underline{e}_z \qquad (24)$$
$$\delta\underline{r}_B = -\,2l\cos\beta\sin\varphi|_{\varphi=0}\delta\varphi\underline{e}_x = \underline{0} \qquad (25)$$

Prinzip der virtuellen Verrückungen:

$$\delta A = \underline{W}\cdot\delta\underline{r}_W + \underline{S}\cdot\delta\underline{r}_W + (-\underline{S}\cdot\delta\underline{r}_B) = 0 \qquad (26)$$
$$\Rightarrow Wl\sin\beta\delta\varphi + (S\cos\beta\underline{e}_x - S\sin\beta\underline{e}_z)\cdot\delta\underline{r}_W = 0 \qquad (27)$$
$$\Rightarrow (Wl\sin\beta + Sl\cos\beta\sin\beta + Sl\sin\beta\cos\beta)\delta\varphi = 0 \qquad (28)$$
$$\Rightarrow S = \frac{-W}{2\cos\beta} \qquad (29)$$

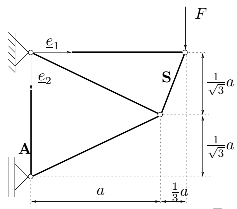
Hausaufgabe

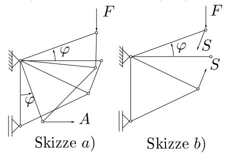
Aufgabe 5

Das abgebildete Fachwerk aus starren Stäben wird mit der Kraft F belastet.

(a) Berechnen Sie mit den Basisvektoren $\underline{e}_1$ und $\underline{e}_2$ sowie mit Skizze a) die Ortsvektoren $\vec{r}_A$ und $\vec{r}_F$ zu den Angriffspunkten der Kräfte A und F. Berechnen Sie die Variationen $\delta\vec{r}_A$ und $\delta\vec{r}_F$. Berechnen Sie die Lagerkraft A mithilfe des PdvV.

(b) Notieren Sie mit Skizze b) den Ortsvektor $\vec{r}_F = \vec{r}_S$ zum gemeinsamen Angriffspunkt der Kräfte F und S. Berechnen Sie die Variationen $\delta\vec{r}_F$ und $\delta\vec{r}_S$. Berechnen Sie die Stabkraft S mithilfe des PdvV, indem Sie S als äußere Last ansehen.





Skizze a) Skizze b)

Hinweis:
$\arctan\frac{\sqrt{3}}{3} = 30°$
$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$
$\sin 30° = \frac{1}{2}$

Geg.: F, a

(a) Die Ortsvektoren $\vec{r}_A$ und $\vec{r}_A$ vom drehbaren Festlager zu den Kraftanfgriffspunkten lauten:

$$\vec{r}_A = \frac{2}{\sqrt{3}}a\left(\sin(\varphi)\vec{e}_1 + \cos(\varphi)\vec{e}_2\right)$$
$$\vec{r}_F = \frac{4}{3}a\left(\cos(\varphi)\vec{e}_1 - \sin(\varphi)\vec{e}_2\right)$$

- Die Variation ergibt sich dann zu:

$$\delta\vec{r}_A = \frac{\partial\vec{r}_A}{\partial\varphi}\delta\varphi = \frac{2}{\sqrt{3}}a\left(\cos(\varphi)\vec{e}_1 - \sin(\varphi)\vec{e}_2\right)\delta\varphi$$
$$\delta\vec{r}_F = \frac{\partial\vec{r}_F}{\partial\varphi}\delta\varphi = \frac{4}{3}a\left(-\sin(\varphi)\vec{e}_1 - \cos(\varphi)\vec{e}_2\right)\delta\varphi$$

- Berechnung der Lagerkraft A, wie folgt:

$$\begin{aligned}\delta W &= A\vec{e}_1\cdot\delta\vec{r}_A|_{\varphi=0} + F\vec{e}_2\cdot\delta\vec{r}_F|_{\varphi=0}\\ &= A\vec{e}_1\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}a\left(\cos(0)\vec{e}_1 - \sin(0)\vec{e}_2\right)\delta\varphi\\ &\quad + F\vec{e}_2\cdot\frac{4}{3}a\left(-\sin(0)\vec{e}_1 - \cos(0)\vec{e}_2\right)\delta\varphi\\ &= \left(\frac{2}{\sqrt{3}}aA - \frac{4}{3}aF\right)\delta\varphi = 0\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad A = \frac{4}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}F$$
$$A = \frac{2}{3}\sqrt{3}F = \frac{2}{\sqrt{3}}F$$

(b) Gesucht ist der Ortsvektor $\vec{r}_F = \vec{r}_S$ zum gemeinsamen Angriffspunkt der Kräfte F und S.

$$\vec{r}_F = \frac{4}{3}a\left(\cos(\varphi)\vec{e}_1 - \sin(\varphi)\vec{e}_2\right)$$
$$\vec{r}_F = \vec{r}_S$$

- Berechnung der Variationen $\delta\vec{r}_F$ und $\delta\vec{r}_S$

$$\delta\vec{r}_F = \delta\vec{r}_S = \frac{4}{3}a\left(-\sin(\varphi)\vec{e}_1 - \cos(\varphi)\vec{e}_2\right)\delta\varphi$$

• Bestimmung der Stabkraft S mithilfe des PdvV:
Die Kraft S liegt in Richtung eines Vektors $\vec{e}_S$. Dieser Vektor läßt sich durch $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$ folgendermaßen ausdrücken.

$$\vec{e}_S = \cos(\alpha)\vec{e}_2 - \sin(\alpha)\vec{e}_1$$

Da $\alpha = 30°$ wegen $\tan\alpha = \frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, ergibt sich für $\vec{e}_S$:

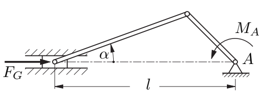
$$\vec{e}_S = -\frac{1}{2}\vec{e}_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{e}_2$$

Damit ist S:

$$\begin{aligned}
\vec{S} &= S\vec{e}_S = S\left(-\frac{1}{2}\vec{e}_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{e}_2\right) \\
\delta W &= F\vec{e}_2 \cdot \delta\vec{r}_F|_{\varphi=0} + \vec{S}\cdot\delta\vec{r}_S|_{\varphi=0} \\
&= -\frac{4}{3}aF - \frac{4}{3}a\frac{\sqrt{3}}{2}S = 0 \\
\Rightarrow \quad S &= -\frac{2}{\sqrt{3}}F
\end{aligned}$$

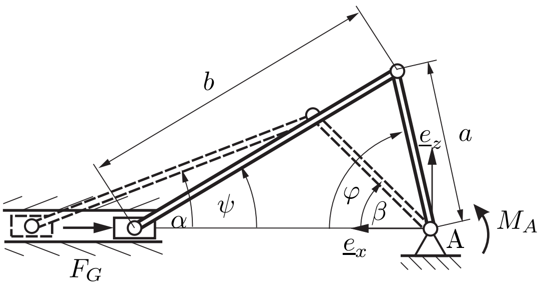
Aufgabe 10

Bei einem Kolbenkompressor wirke in der skizzierten Stellung auf die Kolbenfläche die Gaskraft F_G. Auf die rechte Stange wirkt das Antriebsmoment M_A. Bestimmen Sie mit dem Prinzip der virtuellen Verrückungen die Gleichgewichtslage (Winkel α), wenn die Reibungskräfte vernachlässigt werden.



Geg.: F_G, l, M_A

Nach einer gedachten Verschiebung (Drehung) werden die Ortsvektoren zu den Kraftangriffspunkten in der ausgelenkten Lage aufgestellt und anschließend um die Gleichgewichtslage $\psi = \alpha$, bzw. $\beta = \varphi$ variiert. Das Aufstellen der virtuellen Arbeit liefert die gesuchte Gleichgewichtslage.



Die Belastungsgrößen, Ortsvektoren und ihre Variationen:

$$\underline{r}_F = (a\cos\varphi + b\cos\psi)\underline{e}_x \tag{30}$$
$$\delta\underline{r}_F = (-a\sin\varphi|_{\varphi=\beta}\delta\varphi - b\sin\psi|_{\psi=\alpha}\delta\psi)\underline{e}_x \tag{31}$$
$$\underline{\varphi} = -\varphi\underline{e}_y; \quad \underline{M}_A = M_A\underline{e}_y; \quad \underline{F}_G = -F_G\underline{e}_x; \tag{32}$$
$$\delta\underline{\varphi} = -\delta\varphi\underline{e}_y \tag{33}$$

Kinematische Beziehung:

$$a\sin\varphi = b\sin\psi \tag{34}$$
$$a\cos\varphi|_{\varphi=\beta}\delta\varphi = b\cos\psi|_{\psi=\alpha}\delta\psi \tag{35}$$
$$\delta\psi = \frac{a\cos\beta}{b\cos\alpha}\delta\varphi \tag{36}$$
$$\delta\underline{r}_F = \left(-a\sin\beta - a\sin\alpha\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}\right)\delta\varphi\underline{e}_x \tag{37}$$

Virtuelle Arbeit:

$$\delta A = \underline{F}_G\cdot\delta\underline{r}_F + \underline{M}_A\cdot\delta\underline{\varphi} = 0 \tag{38}$$
$$\left(F_G a\left(\sin\beta + \sin\alpha\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}\right) - M_A\right) = 0 \tag{39}$$

außerdem gilt:

$$b\sin\alpha = a\sin\beta \tag{40}$$
$$b\cos\alpha + a\cos\beta = l \tag{41}$$

eingesetzt ergibt es:

$$F_G\left(b\sin\alpha\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha} + a\sin\alpha\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}\right) - M_A = 0 \tag{42}$$
$$F_G\left(b\tan\alpha\cos\alpha + a\tan\alpha\cos\beta\right) - M_A = 0 \tag{43}$$
$$F_G\tan\alpha\left(b\cos\alpha + a\cos\beta\right) - M_A = 0 \tag{44}$$
$$\tan\alpha = \frac{M_A}{F_G l}, \tag{45}$$
$$\text{also:} \quad \alpha = \arctan\frac{M_A}{F_G l}. \tag{46}$$

Aufgabe 14

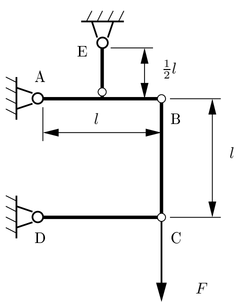
Die abgebildete Konstruktion besteht aus drei starren Balken (AB, BC und CD) und einer Stütze, die in der Mitte des Balkens AB angebracht ist.

Zur Dimensionierung der Stütze soll die Kraft in der Stütze bestimmt werden.

Führen Sie die Berechnungen auf zwei verschiedenen Wegen durch:

(a) Schneiden Sie frei und berechnen Sie die gesuchte Kraft mittels Kräfte- und Momentengleichgewichten.

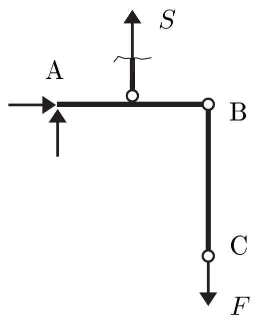
(b) Nutzen Sie das Prinzip der virtuellen Verückungen zur Bestimmung der gesuchten Kraft.



Geg.: F, l

(a) Elementare Mechanik:

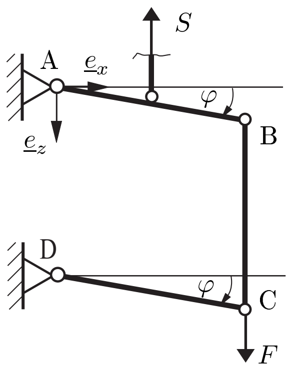
Zur Lösung der Aufgabe werden die Gleichgewichtsbedingungen genutzt. Zudem ist durch einen Knotenschnitt am Punkt C zu erkennen, daß es sich beim Stab CD um einen Nullstab handelt. Daher reicht der skizzierte Freischnitt, um mittels Momentengleichgewicht bezüglich des Punktes A auf die gesuchte Stabkraft S zu schließen.



$$\sum M^A = 0 \Rightarrow \underline{\underline{S = 2F}} \tag{47}$$

(b) Analytische Mechanik:

Zur Berechnung der Stabkraft wird das Prinzip der virtuellen Verrückungen genutzt. Dabei wird zunächst die gesuchte Kraft durch einen Freischnitt sichtbar gemacht, wodurch das System einen Pseudofreiheitsgrad erhält. Nach einer gedachten Verschiebung (Drehung) werden die Ortsvektoren zu den Kraftangriffspunkten in der ausgelenkten Lage aufgestellt und anschließend um die Gleichgewichtslage $\varphi = 0$ variiert. Das Aufstellen der virtuellen Arbeit liefert die gesuchte unbekannte Stabkraft.



Ortsvektoren:

$$\underline{r}_S = \frac{l}{2}\cos\varphi\underline{e}_x + \frac{l}{2}\sin\varphi\underline{e}_z \tag{48}$$

$$\underline{r}_F = l\cos\varphi\underline{e}_x + (l + l\sin\varphi)\underline{e}_z \tag{49}$$

Variation:

$$\delta\underline{r}_S = -\frac{l}{2}\sin\varphi\bigg|_{\varphi=0}\delta\varphi\underline{e}_x + \frac{l}{2}\cos\varphi\bigg|_{\varphi=0}\delta\varphi\underline{e}_z = \underline{\underline{\frac{l}{2}\delta\varphi\underline{e}_z}} \tag{50}$$

$$\delta\underline{r}_F = -l\sin\varphi|_{\varphi=0}\delta\varphi\underline{e}_x + l\cos\varphi|_{\varphi=0}\delta\varphi\underline{e}_z = \underline{\underline{l\delta\varphi\underline{e}_z}} \tag{51}$$

Prinzip der virtuellen Verrückungen:

$$\delta W = \underline{F}\cdot\delta\underline{r}_F + \underline{S}\cdot\delta\underline{r}_S = 0 \tag{52}$$

$$(Fl - \frac{Sl}{2})\delta\varphi = 0 \Rightarrow \underline{\underline{S = 2F}} \tag{53}$$