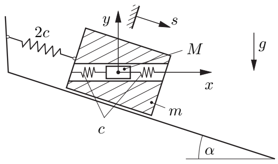
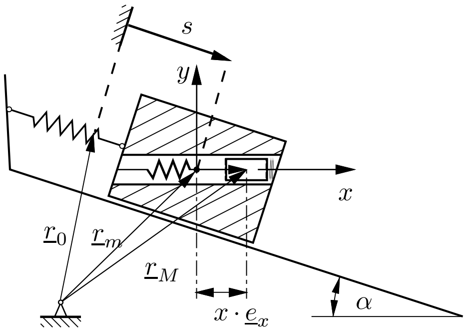
Tutorium

Aufgabe 18

Auf einer schiefen Ebene bewegt sich reibungsfrei ein Körper der Masse m, Bewegungskoordinate s, infolge der Schwerkraft abwärts. In einer radialen Bohrung ist ein Zylinder der Masse M, der Relativkoordinate x, elastisch angeordnet, der sich ebenfalls reibungsfrei bewegen kann. Ausgehend von der Ruhelage des Systems sind mit den Lagrangeschen Gleichungen 2. Art die Bewegungsdifferentialgleichungen für die generalisierten Koordinaten s und x aufzustellen.



Geg.: m, M, c, α, g



1. Ortsvektoren und Kinematik

$$\underline{r}_m = \underline{r}_0 + s\cos\alpha\underline{e}_x - s\sin\alpha\underline{e}_y \tag{1}$$
$$\left|\underline{\dot{r}}_m\right|^2 = \dot{s}^2 \tag{2}$$
$$\underline{r}_M = \underline{r}_m + x\underline{e}_x \tag{3}$$
$$= \underline{r}_0 + (x + s\cos\alpha)\underline{e}_x - s\sin\alpha\underline{e}_y \tag{4}$$
$$\left|\underline{\dot{r}}_M\right|^2 = \dot{x}^2 + \dot{s}^2 + 2\,\dot{x}\dot{s}\cos\alpha \tag{5}$$

Dabei ist $\underline{r}_0$ der Vektor vom beliebigen, festen Punkt zum Schwerpunkt des Systems in der Ausgangslage.

2. Kinetische Energie:

$$T = \frac{1}{2}m\left|\underline{\dot{r}}_m\right|^2 + \frac{1}{2}M\left|\underline{\dot{r}}_M\right|^2 \tag{6}$$
$$= \frac{1}{2}m\dot{s}^2 + \frac{1}{2}M\left(\dot{x}^2 + \dot{s}^2\right) + M\dot{x}\dot{s}\cos\alpha \tag{7}$$

3. Potentielle Energie:

$$U = -(M+m)gs\sin\alpha + \frac{1}{2}2c\cdot s^2 + \frac{1}{2}2c\cdot x^2 \tag{8}$$

4. Lagrangesche Funktion:
(Generalisierte Koordinaten: s und x)

$$L = T - U \tag{9}$$
$$= \frac{1}{2}m\dot{s}^2 + \frac{1}{2}M\left(\dot{x}^2 + \dot{s}^2\right) + M\dot{x}\dot{s}\cos\alpha + \underbrace{(M+m)}_{=:\,m_{\text{ges}}}gs\sin\alpha - c\left(s^2 + x^2\right) \tag{10}$$

5. Ableitungen:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{s}} = m_{\text{ges}}\dot{s} + M\dot{x}\cos\alpha \tag{11}$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{s}}\right) = m_{\text{ges}}\ddot{s} + M\ddot{x}\cos\alpha \tag{12}$$
$$\frac{\partial L}{\partial s} = m_{\text{ges}}g\sin\alpha - 2cs \tag{13}$$
$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = M\dot{x} + M\dot{s}\cos\alpha \tag{14}$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = M\ddot{x} + M\ddot{s}\cos\alpha \tag{15}$$
$$\frac{\partial L}{\partial x} = -2cx \tag{16}$$

6. Bewegungsgleichungen: Lagrangesche gleichung für konservative Systeme

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\right) = 0 \qquad i = 1,2 \tag{17}$$

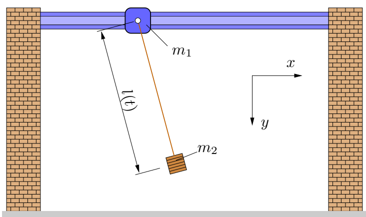
Ausgewertet ergibt das für $i = 1$ mit $q_1 = s$:

$$m_{\text{ges}}\ddot{s} + 2cs + M\cos\alpha\ddot{x} = m_{\text{ges}}g\sin\alpha \tag{18}$$

und für $i = 2$ mit $q_2 = x$:

$$M\cdot\ddot{x} + 2cx + M\cos\alpha\ddot{s} = 0. \tag{19}$$

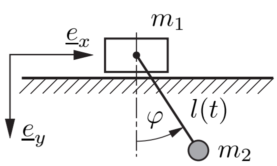
Aufgabe 20



Die Aufhängevorrichtung eines ebenen Pendels mit der zeitlich veränderlichen Länge $l(t)$ und der Pendelmasse m_2 gleitet reibungsfrei auf einer horizontalen Führung und hat die Masse m_1.

Ermitteln Sie mit Hilfe der Lagrangeschen Gleichungen 2. Art die Bewegungsdifferentialgleichungen für das System.

Geg.: m_1, m_2, $l(t)$, g



Kinematik:

Das System hat 2 Freiheitsgrade, weshalb 2 generalisierte Koordinaten gewählt werden.

$$q_1 = x \text{ Koordinate zum Mittelpunkt der Masse } m_1 \tag{20}$$
$$q_2 = \varphi \text{ Drehwinkel (siehe Skizze)} \tag{21}$$

$$\underline{r}_1 = x\underline{e}_x \;\Rightarrow\; \underline{v}_1 \equiv \underline{\dot{r}}_1 = \dot{x}\underline{e}_x \tag{22}$$
$$\underline{r}_2 = \underline{r}_1 + \underline{r}_{12} = x\underline{e}_x + l(t)\sin\varphi\underline{e}_x + l(t)\cos\varphi\underline{e}_y \tag{23}$$
$$\Rightarrow \underline{v}_2 \equiv \underline{\dot{r}}_2 \tag{24}$$
$$= \left(\dot{x} + \dot{l}\sin\varphi + l\cos\varphi\dot{\varphi}\right)\underline{e}_x + \left(\dot{l}\cos\varphi - l\sin\varphi\dot{\varphi}\right)\underline{e}_y$$

Kinetische Energie:

$$
\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2}m_1\, v_1^2 + \frac{1}{2}m_2\, v_2^2 = \frac{1}{2}m_1\, \dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_2 \\
&\quad \Big[\big(\dot{x} + \dot{l}\sin\varphi + l\cos\varphi\dot{\varphi}\big)^2 + \big(\dot{l}\cos\varphi - l\sin\varphi\dot{\varphi}\big)^2\Big] \\
&= \frac{1}{2}(m_1+m_2)\,\dot{x}^2 + m_2\big(\dot{x}\dot{l}\sin\varphi + \dot{x}l\cos\varphi\dot{\varphi}\big) \\
&\quad + \frac{1}{2}m_2\Big[\big(\dot{l}\sin\varphi + l\cos\varphi\dot{\varphi}\big)^2 + \big(\dot{l}\cos\varphi - l\sin\varphi\dot{\varphi}\big)^2\Big] \\
&= \frac{1}{2}(m_1+m_2)\,\dot{x}^2 + m_2\big(\dot{x}\dot{l}\sin\varphi + \dot{x}l\cos\varphi\dot{\varphi}\big) \\
&\qquad + \frac{1}{2}m_2\big(\dot{l}^2 + l^2\dot{\varphi}^2\big)
\end{aligned} \tag{25}
$$

Potientelle Energie:

$$
U = -m_2 g\, l(t)\cos\varphi \tag{26}
$$

Lagrange - Funktion:

$$
\begin{aligned}
L &= T - U \\
&= \frac{1}{2}(m_1+m_2)\,\dot{x}^2 + m_2\big(\dot{x}\dot{l}\sin\varphi + \dot{x}l\cos\varphi\dot{\varphi}\big) \\
&\quad + \frac{1}{2}m_2\big(\dot{l}^2 + l^2\dot{\varphi}^2\big) + m_2 g\, l(t)\cos\varphi
\end{aligned} \tag{27}
$$

Ableitungen:

$$
\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (m_1+m_2)\dot{x} + m_2\big(\dot{l}\sin\varphi + l\cos\varphi\dot{\varphi}\big) \tag{28}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\Big) &= (m_1+m_2)\ddot{x} + m_2 \\
&\quad \big(\ddot{l}\sin\varphi + 2\dot{l}\cos\varphi\dot{\varphi} - l\sin\varphi\dot{\varphi}^2 + l\cos\varphi\ddot{\varphi}\big)
\end{aligned} \tag{29}
$$

$$
\frac{\partial L}{\partial x} = 0 \tag{30}
$$

$$
\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m_2\big(\dot{x}l\cos\varphi + l^2\dot{\varphi}\big) \tag{31}
$$

$$
\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\Big) = m_2\big(\ddot{x}l\cos\varphi + \dot{x}\dot{l}\cos\varphi - \dot{x}l\sin\varphi\dot{\varphi} + 2l\dot{l}\dot{\varphi} + l^2\ddot{\varphi}\big) \tag{32}
$$

$$
\frac{\partial L}{\partial \varphi} = m_2\big(\dot{x}\dot{l}\cos\varphi - \dot{x}l\sin\varphi\dot{\varphi}\big) - m_2 g l\sin\varphi \tag{33}
$$

$$
\alpha = \big(\dot{x}\dot{l}\cos\varphi - \dot{x}l\sin\varphi\dot{\varphi}\big) \tag{34}
$$

Lagrange - Gleichungen 2.Art:

für konservative Systeme

$$
\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\Big) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \tag{35}
$$

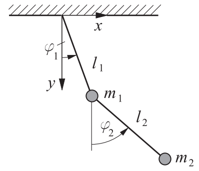
Bewegungsdifferentialgleichungssystem

$$
\begin{aligned}
(m_1+m_2)\ddot{x} + m_2\big(\ddot{l}\sin\varphi + 2\dot{l}\cos\varphi\dot{\varphi} \\
-l\sin\varphi\dot{\varphi}^2 + l\cos\varphi\ddot{\varphi}\big) = 0 \\
\ddot{x}l\cos\varphi + 2l\dot{l}\dot{\varphi} + l^2\ddot{\varphi} + gl\sin\varphi = 0
\end{aligned}
$$

Hausaufgaben

Aufgabe 17

Zwei masselose Stangen (Längen l_1 und l_2) und zwei Punktmassen m_1 und m_2 bilden ein Doppelpendel.



(a) Bestimme für die Bewegung des skizzierten Doppelpendels in einer vertikalen Ebene (Erdbeschleunigung g) mit Hilfe der Lagrangeschen Gleichungen 2. Art die Bewegungsgleichungen. Nutze die generalisierten Koordinaten φ_1 und φ_2.

(b) Wie lauten die Gleichgewichtslagen?

Geg.: m_1, m_2, l_1, l_2, g

a) Das Nullniveau für die potentielle Energie liege bei $y = 0$.

$$
U = -gm_1y_1 - gm_2y_2 \tag{36}
$$

Kinetische Energie:

$$
T = \frac{1}{2}m_1\Big(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2\Big) + \frac{1}{2}m_2\Big(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2\Big) \tag{37}
$$

Kinematische Beziehungen: Drücke die in (36) und (37) vorkommenden kinematischen Größen aus als Funktion der beiden (willkürlich gewählten) generalisierten Koordinaten φ_1 und φ_2. (System hat 2 Freiheitsgrade)

$$
y_1 = l_1\cos\varphi_1 \qquad \dot{y}_1 = -\dot{\varphi}_1\, l_1\sin\varphi_1 \tag{38}
$$

$$
x_1 = l_1\sin\varphi_1 \qquad \dot{x}_1 = \dot{\varphi}_1\, l_1\cos\varphi_1 \tag{39}
$$

$$
y_2 = y_1 + l_2\cos\varphi_2 \qquad \dot{y}_2 = \dot{y}_1 - \dot{\varphi}_2\, l_2\sin\varphi_2 \tag{40}
$$

$$
x_2 = x_1 + l_2\sin\varphi_2 \qquad \dot{x}_2 = \dot{x}_1 + \dot{\varphi}_2\, l_2\cos\varphi_2 \tag{41}
$$

Die Lagrangefunktion ergibt sich damit zu:

$$
L = T - U \tag{42}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}m_1 l_1^2\dot{\varphi}_1^2\Big(\cos^2\varphi_1 + \sin^2\varphi_1\Big) \\
&\quad + \frac{1}{2}m_2\Big[\dot{\varphi}_1^2 l_1^2 + \dot{\varphi}_2^2 l_2^2 + 2\dot{\varphi}_1 l_1\dot{\varphi}_2 l_2 \\
&\qquad\qquad \Big(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2\Big)\Big] \\
&\quad + g(m_1+m_2)l_1\cos\varphi_1 + gm_2 l_2\cos\varphi_2
\end{aligned} \tag{43}
$$

mit $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ und $\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha-\beta)$:

$$
\begin{aligned}
L &= \frac{1}{2}(m_1+m_2)l_1^2\dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2}m_2 l_2^2\dot{\varphi}_2^2 \\
&\quad + m_2\dot{\varphi}_1 l_1\dot{\varphi}_2 l_2\cos(\varphi_1-\varphi_2) \\
&\quad + g(m_1+m_2)l_1\cos\varphi_1 + gm_2 l_2\cos\varphi_2
\end{aligned} \tag{44}
$$

Für die Lagrangeschen Gleichung 2.Art

$$
\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_i}\Big) - \frac{\partial L}{\partial \varphi_i} = 0, \qquad i = 1,2 \tag{45}
$$

benötigen wir die Ableitungen

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \varphi_1} &= -m_2 l_1 l_2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\sin(\varphi_1-\varphi_2) \\
&\qquad - g(m_1+m_2)l_1\sin\varphi_1
\end{aligned} \tag{46}
$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi_2} = m_2 l_1 l_2 \dot\varphi_1 \dot\varphi_2 \sin(\varphi_1-\varphi_2) - g m_2 l_2 \sin\varphi_2 \tag{47}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi_1} = (m_1+m_2) l_1^2 \dot\varphi_1 + m_2 l_1 l_2 \dot\varphi_2 \cos(\varphi_1-\varphi_2) \tag{48}$$

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi_1}\Big) = (m_1+m_2) l_1^2 \ddot\varphi_1 + m_2 l_1 l_2 \Big[\ddot\varphi_2 \cos(\varphi_1-\varphi_2) - (\dot\varphi_1-\dot\varphi_2)\dot\varphi_2 \sin(\varphi_1-\varphi_2)\Big] \tag{49}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi_2} = m_2 l_2^2 \dot\varphi_2 + m_2 l_1 l_2 \dot\varphi_1 \cos(\varphi_1-\varphi_2) \tag{50}$$

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi_2}\Big) = m_2 l_2^2 \ddot\varphi_2 + m_2 l_1 l_2 \Big[\ddot\varphi_1 \cos(\varphi_1-\varphi_2) - \dot\varphi_1(\dot\varphi_1-\dot\varphi_2) \sin(\varphi_1-\varphi_2)\Big] \tag{51}$$

eingesetzt in (45) erhalten wir die beiden Bewegungsdifferentialgleichungen

$$l_1\ddot\varphi_1 + \frac{m_2}{m_1+m_2} l_2 \Big[\ddot\varphi_2 \cos(\varphi_1-\varphi_2) + \dot\varphi_2^2 \sin(\varphi_1-\varphi_2)\Big] + g\sin\varphi_1 = 0 \tag{52}$$

$$l_2\ddot\varphi_2 + l_1 \Big[\ddot\varphi_1 \cos(\varphi_1-\varphi_2) - \dot\varphi_1^2 \sin(\varphi_1-\varphi_2)\Big] + g\sin\varphi_2 = 0 \tag{53}$$

b)

$$\text{Gleichgewicht :}\quad \dot\varphi_{i,G} = 0, \quad \ddot\varphi_{i,G} = 0 \tag{54}$$

$$\text{aus (52):}\quad g\sin\varphi_{1,G} = 0 \tag{55}$$

$$\text{aus (53):}\quad g\sin\varphi_{2,G} = 0 \tag{56}$$

$$\varphi_{1,G} = k\pi, \quad k = 0,1,2... \tag{57}$$

$$\varphi_{2,G} = m\pi, \quad m = 0,1,2... \tag{58}$$

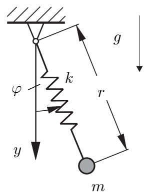
Gleichgewicht herrscht, wenn jedes Pendel entweder genau senkrecht hängt oder genau senkrecht nach oben steht.

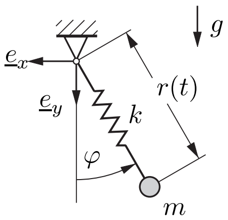
Aufgabe 19

Ein Massenpunkt m ist am unteren Ende einer Feder k angebracht. Am oberen Ende ist die Feder drehbar gelagert. In spannungloser Ruhelage hat die Feder die Länge r_0.

Stellen Sie die Bewegungsdifferentialgleichungen des Systems mit Hilfe der Lagrangeschen Gleichungen 2.Art auf.

Geg.: k, m, r_0, g





<u>Kinetische Energie:</u>

$$T = \frac{1}{2} m\big(\underline{v}\cdot\underline{v}\big) = \frac{1}{2} m v^2 \tag{59}$$

$$\text{mit}\quad \underline{v}\cdot\underline{v} = |\underline{v}|\underline{e}_v \cdot |\underline{v}|\underline{e}_v = |\underline{v}|^2 = v^2 \tag{60}$$

<u>Potentielle Energie:</u>

$$U = -mgr(t)\cos\varphi(t) + \frac{1}{2}k\big(r(t)-r_0\big)^2 \tag{61}$$

<u>Lagrange-Funktion:</u>

$$L = T - U = \frac{1}{2} m v^2 + mgr\cos\varphi - \frac{1}{2}k\big(r-r_0\big)^2 \tag{62}$$

<u>Kinematik:</u>

$$\underline{r} = -r(t)\sin\varphi(t)\underline{e}_x + r(t)\cos\varphi(t)\underline{e}_y \tag{63}$$

$$\underline{v} = -\dot r(t)\sin\varphi(t)\underline{e}_x - r(t)\cos\varphi(t)\dot\varphi(t)\underline{e}_x + \dot r(t)\cos\varphi(t)\underline{e}_y - r(t)\sin\varphi(t)\dot\varphi(t)\underline{e}_y \tag{64}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow v^2 \equiv \underline{v}\cdot\underline{v} &= \dot r^2 + 2\dot r r \sin\varphi\cos\varphi\dot\varphi + r^2\dot\varphi^2 \\ &\quad - 2\dot r r\sin\varphi\cos\varphi\dot\varphi \\ &= \dot r^2 + r^2\dot\varphi^2\end{aligned} \tag{65}$$

<u>alternativ:</u>

Darstellung über ursprungsfestes mitdrehendes Koordinatensystem

$$\underline{r} = r(t)\underline{e}_r \tag{66}$$

$$\underline{v} = \underline{\dot r} = \dot r\underline{e}_r + r\dot\varphi\underline{e}_\varphi \tag{67}$$

$$\Rightarrow \underline{v}\cdot\underline{v} = \dot r^2 + r^2\dot\varphi^2 \tag{68}$$

<u>Kinematik in der Lagrangefunktion berücksichtigen:</u>

$$\Rightarrow\ L = \frac{1}{2} m\big(\dot r^2 + r^2\dot\varphi^2\big) + mgr\cos\varphi - \frac{1}{2}k\big(r-r_0\big)^2 \tag{69}$$

<u>Lagrange - Gleichungen 2. Art ansetzen:</u>

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\Big) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \tag{70}$$

Es treten nur konservative Kräfte auf.

Das System besitzt 2 Freiheitsgrade, somit existieren 2 generalisierte Koordinaten. Diese wurden hier so gewählt:

$$q_1 = r \tag{71}$$

$$q_2 = \varphi \tag{72}$$

Ableitungen:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot r} = m\dot r \Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot r} = m\ddot r \tag{73}$$

$$\frac{\partial L}{\partial r} = mr\dot\varphi^2 + mg\cos\varphi - k\big(r - r_0\big) \tag{74}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} = mr^2\dot\varphi \Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} = 2mr\dot r\dot\varphi + mr^2\ddot\varphi \tag{75}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = -mgr\sin\varphi \tag{76}$$

Bewegungsdifferentialgleichungssystem

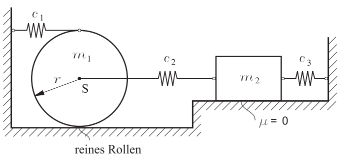
$$\Rightarrow m\ddot r - mr\dot\varphi^2 - mg\cos\varphi + k\big(r - r_0\big) = 0 \tag{77}$$

$$r\ddot\varphi + 2\dot r\dot\varphi + g\sin\varphi = 0 \tag{78}$$

Aufgabe 21

(a) Für das skizzierte System stelle man das Bewegungsdifferentialgleichungssystem auf und schreibe es auf Matrizenform um. Es sollen von vornherein kleine Auslenkungen angenommen werden.

(b) Man berechne die Eigenkreisfrequenzen und die dazugehörigen Eigenformen des Systems.



Geg.: $c_1 = \frac{1}{4}c$, $c_2 = c_3 = c$, $m_1 = \frac{2}{3}m$, $m_2 = m$, $\Theta_S = \frac{1}{2}m_1 r^2$, r

(a) Aufstellen der potentiellen und kinetischen Energie

$$U = \frac{1}{2}c_1(2x_1)^2 + \frac{1}{2}c_2(x_1 - x_2)^2 + \frac{1}{2}c_3 x_2^2 \tag{79}$$

$$= \frac{c}{8}4x_1^2 + \frac{1}{2}c(x_1 - x_2)^2 + \frac{1}{2}cx_2^2 \tag{80}$$

$$= \frac{1}{2}cx_1^2 + \frac{1}{2}c(x_1 - x_2)^2 + \frac{1}{2}cx_2^2 \tag{81}$$

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot x_1^2 + \frac{1}{2}\theta_S\left(\frac{\dot x_1}{r}\right)^2 + \frac{1}{2}m_2\dot x_2^2 \tag{82}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{2}{3}m\dot x_1^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{2}{3}mr^2\frac{\dot x_2^2}{r^2} + \frac{1}{2}m\dot x_2^2 \tag{83}$$

$$= \frac{2}{6}m\dot x_1^2 + \frac{1}{6}m\dot x_1^2 + \frac{1}{2}m\dot x_2^2 \tag{84}$$

$$= \frac{1}{2}m\dot x_1^2 + \frac{1}{2}m\dot x_2^2 \tag{85}$$

Lagrangefunktion:

$$L = T - U = \frac{1}{2}m\dot x_1^2 + \frac{1}{2}m\dot x_2^2 - \left(\frac{1}{2}cx_1^2 + \frac{1}{2}c(x_1 - x_2)^2 + \frac{1}{2}cx_2^2\right) \tag{86}$$

erste Bewegungsgleichung (Lagrangegleichung für konservatives System)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot x_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_1} = 0 \tag{87}$$

$$m\ddot x_1 + cx_1 + c(x_1 - x_2) = 0 \tag{88}$$

$$\ddot x_1 + \frac{2c}{m}x_1 - \frac{c}{m}x_2 = 0 \tag{89}$$

zweite Bewegungsgleichung (Lagrangegleichung für konservatives System)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot x_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_2} = 0 \tag{90}$$

$$m\ddot x_2 - c(x_1 - x_2) + cx_2 = 0 \tag{91}$$

$$\ddot x_2 + \frac{2c}{m}x_2 - \frac{c}{m}x_1 = 0 \tag{92}$$

Darstellung in Matrizenform

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\ddot x_1\\ \ddot x_2\end{pmatrix} + \begin{bmatrix}2\frac{c}{m} & -\frac{c}{m}\\ -\frac{c}{m} & 2\frac{c}{m}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \tag{93}$$

mit $\omega_0^2 = \frac{c}{m}$ gilt:

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\ddot x_1\\ \ddot x_2\end{pmatrix} + \begin{bmatrix}2\omega_0^2 & -\omega_0^2\\ -\omega_0^2 & 2\omega_0^2\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \tag{94}$$