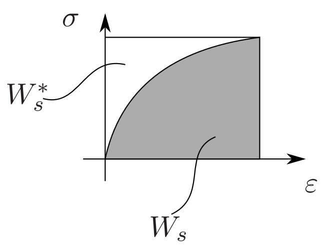
# 1 Energien kontinuierlicher Medien

## 1.1 Formänderungsenergie

Unter Formänderungsenergie versteht man die Energie die ein Körper besitzt, um in der aktuellen verformten Lage zu sein. Sie wird oft als potentielle Energie eines Körpers bezeichnet.

**Allgemein gilt am Beispiel Dehnstab:**



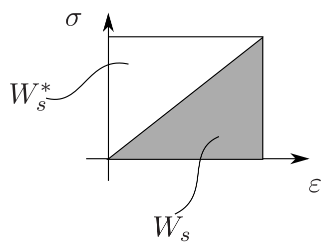

$W_s$ ist die **spezifische Formänderungsenergie** die pro Volumenelement benötigt wird, um den Stab zu verformen. Sie ist quasi die Arbeit, die die Spannung am Volumenelement verrichtet.

$W_s^*$ ist die **spezifische Formänderungsergänzungsenergie**.

$W$ ist die gesamte **Formänderungsenergie**. Sie definiert sich als

$$W = \int_0^l W_s \, \mathrm{d}V = \int_0^l W_s A \, \mathrm{d}x \, .$$

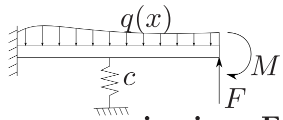
**Linear elastisches Material:**




$$\sigma = E\varepsilon = Eu'$$
$$W_s = \frac{1}{2}\sigma\varepsilon = \frac{1}{2}Eu'^2 = W_s^*$$
$$W = \frac{1}{2}\int_0^l EAu'^2 \, \mathrm{d}x$$

## 1.2 Äußere Arbeit und sonstige potentielle Energie

Am Beispiel des gezeigten Balkens:




**Potentielle Energie einer Feder/Formänderungsenergie einer Feder :**

$$W_F = \frac{1}{2}c\Delta x^2 = \frac{1}{2}c(w(\frac{l}{2}))^2$$

**Äußere Arbeit:**

$$A = \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i + \sum_j \vec{M}_j \cdot \vec{\varphi}_j + \int_0^l q(x)w(x)dx$$

Die gesammte Energie, die ein System speichert, ist dann die Differenz aus der äußeren Arbeit und den potentiellen Energien:

$$\Pi = W - A$$

## 1.3 Kinetische Energie

Sie ist die Bewegungsenergie des Systems und definiert sich weiterhin als $\frac{1}{2} * m * v^2$, nur dass nun über das gesamte Gebiet integriert werden muss (siehe Tabelle).

## 1.4 Übersicht der Energien

| | Längsdehnung | ebene Biegung | Torsion | Saite |
|---|---|---|---|---|
| Verformungsgröße | $u$ | $w,\ \varphi = -w'$ | $\vartheta$ | $w$ |
| Steifigkeit | $EA$ | $EI_y$ | $GI_p$ | Vorspannung $S$ |
| Material-Struktur-Gesetz | $N = EAu'$ | $M_b = -EI_y w''$ | $M_t = GI_p \vartheta'$ | |
| $W$ in Schnittlastdarstellung | $W = \frac{1}{2}\int_{\mathcal{L}} \frac{N^2}{EA}\mathrm{d}x$ | $W = \frac{1}{2}\int_{\mathcal{L}} \frac{M_b^2}{EI_y}\mathrm{d}x$ | $W = \frac{1}{2}\int_{\mathcal{L}} \frac{M_t^2}{GI_p}\mathrm{d}x$ | $W = \frac{1}{2}\int_{\mathcal{L}} S(w')^2\mathrm{d}x$ |
| $W$ in Verformungsdarstellung | $W = \frac{1}{2}\int_{\mathcal{L}} EA\left(u'\right)^2 \mathrm{d}x$ | $W = \frac{1}{2}\int_{\mathcal{L}} EI_y\left(w''\right)^2 \mathrm{d}x$ | $W = \frac{1}{2}\int_{\mathcal{L}} GI_t\left(\vartheta'\right)^2 \mathrm{d}x$ | siehe oben |
| kinetische Energie | $K = \frac{1}{2}\int_{\mathcal{L}} \rho A\dot{u}^2\mathrm{d}x$ | $K = \frac{1}{2}\int_{\mathcal{L}} \rho A\dot{w}^2\mathrm{d}x$ | $K = \frac{1}{2}\int_{\mathcal{L}} \rho I_p\dot{\vartheta}^2\mathrm{d}x$ | $K = \frac{1}{2}\int_{\mathcal{L}} \rho A\dot{w}^2\mathrm{d}x$ |

# 2 Das Verfahren von Ritz

Das Verfahren ist ein Näherungsverfahren zur Bestimmung der Verformung (Statik), oder der Eigenkreisfrequenzen (Dynamik)

## 2.1 Statisch

1. Mache einen Ansatz für die Verformung der Art:

$$\xi(x) = \sum_{n=1}^{N} a_n \psi_n(x)\,,$$

   so, dass die $\psi_n$ unabhängig voneinander sind, und die Funktion insgesamt den geometrischen Randbedingungen des Systems genügt.

2. Berechne dann $\Pi = W - A$

3. $\Pi$ muß ein Minimum in der verformten statischen Lage haben. Es gilt:

$$\delta\Pi = \sum_{n=1}^{N} \frac{\partial \Pi}{\partial a_n} \delta a_n = 0\,.$$

   Da die $\delta a_n$ voneinander unabhängig sind muss weiter gelten $\frac{\partial \Pi}{\partial a_n} = 0$ für jedes $n$. Man erhält also $N$ Gleichungen für die $N$ Unbekannten $a_n$.

## 2.2 Dynamisch, Rayleigh-Ritz

1. Mache einen eingliedrigen Ansatz für die Verformung der Art:

$$\xi(x,t) = a(t)\psi(x)\,,$$

   (Der Unterschied zwischen Ritz und Rayleigh-Ritz ist genau, dass der Ansatz eingliedrig ist)

2. Berechne dann $L = K - U$, wobei $U$ hier identisch $W$ ist.

3. Wende den Lagrangeformalismus an:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{a}}\right) - \frac{\partial L}{\partial a} = 0$$

   Am Beispiel Biegung ergibt sich:

$$\int_{\mathcal{L}} \rho A \psi^2 \mathrm{d}x \cdot \ddot{a} + \int_{\mathcal{L}} EI_y \left(\psi''\right)^2 \mathrm{d}x \cdot a = 0$$

4. Bestimme den Rayleigh-Quotienten und damit die erste Eigenkreisfrequenz $\omega$
   Am Beispiel Biegung ergibt sich:

$$\omega = \sqrt{\frac{\int_{\mathcal{L}} EI_y \left(\psi''\right)^2 \mathrm{d}x}{\int_{\mathcal{L}} \rho A \psi^2 \mathrm{d}x}}$$