Theorieteil:

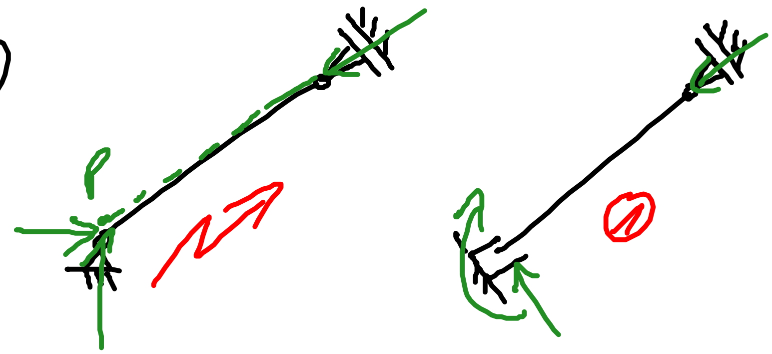
- Am besten mit Theorieteil beginnen
- Antworten genau prüfen, da keine halben Punkte!

Bsp.: 1.) $[x_s] = 1$ $\qquad$ 5.) $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{pmatrix} -6 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix}$

$= m$ 1

$= \begin{pmatrix} -6 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix} Nm$ 1

9.)

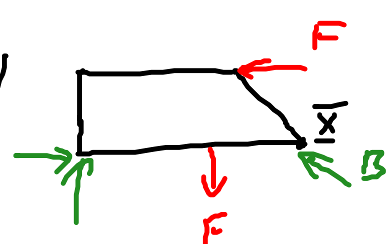


1

Rechenteil:

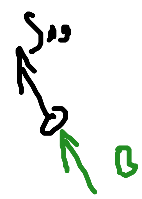
- FS genau machen (Alle Lager frei, Kraft mit Richtung)
- Zwischenergebnisse einsetzen

Bsp.: 3.) a)



$B = \frac{\sqrt{2}}{3} F$

c) FS: X/



$S_{10} = -B$

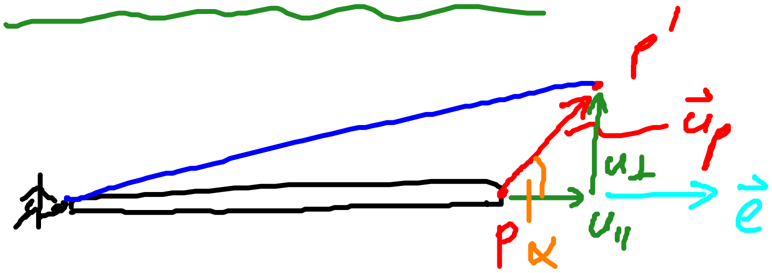
$= -B = -\frac{\sqrt{2}}{3} F$ 1

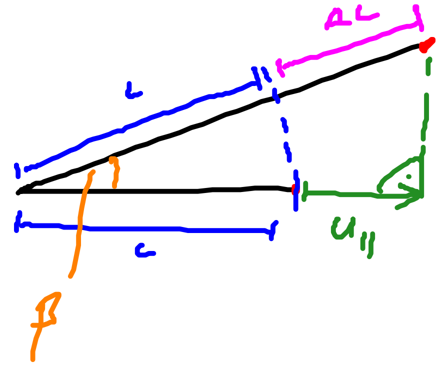
- Auf Dimensionsfehler achten!

→ kommentieren! „Ich wette hier ist was faul…!“

9. Übung: Kinematik, Torsion

Linearisierte Kinematik:





$$\cos(\beta) = \frac{L + u_\parallel}{L + \Delta L} \Rightarrow (L + \Delta L)\underbrace{\cos(\beta)}_{\approx 1 \text{ (kleine } \beta)} = L + u_\parallel$$

$$\cancel{L} + \Delta l = \cancel{L} + u_\parallel \rightarrow \boxed{\Delta l = u_\parallel}$$

$$u_\parallel = |\vec{u}_p| \cos(\alpha) = \underbrace{|\vec{u}_p| \cdot |\vec{e}| \cos(\alpha)}_{\text{SKP aus } \vec{u}_p \text{ und } \vec{e}}$$

$$\boxed{\Delta l = \vec{u}_p \cdot \vec{e}}$$

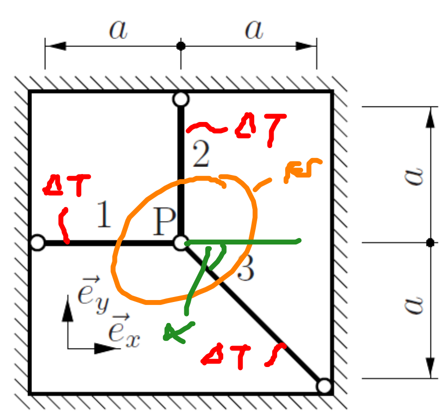
$\vec{e}$:
- $|\vec{e}| = 1$
- zeigt in Richtung des Stabes
- „raus aus dem Stab“

1. Aufgabe

1. In einem starren Rahmen werden drei Stäbe (Querschnittsfläche A) aus dem gleichen Material (Elastizitätsmodul E, Temperatur-Ausdehnungs-Koeffizient α_t) wie skizziert spannungsfrei eingebaut.

   Berechnen Sie die Spannungen in den Stäben und die Verschiebung des mittleren Knotens P, die durch eine Temperaturänderung um ΔT hervorgerufen werden.

   Geg.: a, ΔT, A, E, α_t, $\alpha_t > 0$

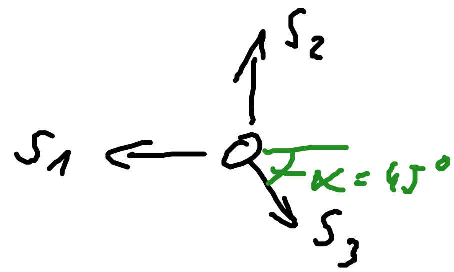


Statische Bestimmtheit: $f = r + v$

$9 \neq 6 + 4 \longrightarrow$ statisch überbestimmt

Lösung mit Schema aus Ue 8:

1.) GGB: FS:



$$\sum F_x \overset{!}{=} 0, \quad 0 = -S_1 + S_3 \cos(\alpha) \implies S_1 = S_3 \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad (1)$$

$$\sum F_y \overset{!}{=} 0, \quad 0 = S_2 - S_3 \sin(\alpha) \implies S_2 = S_3 \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad (2)$$

2.) MSG:

$$\left.\begin{aligned} &\text{Hooke:} \quad \sigma = E \varepsilon_m \\ &\text{Therm:} \quad \varepsilon_{th} = \alpha_T \Delta T \end{aligned}\right\} \varepsilon_{ges} = \frac{\sigma}{E} + \alpha_T \Delta T = \frac{\Delta L}{L}$$

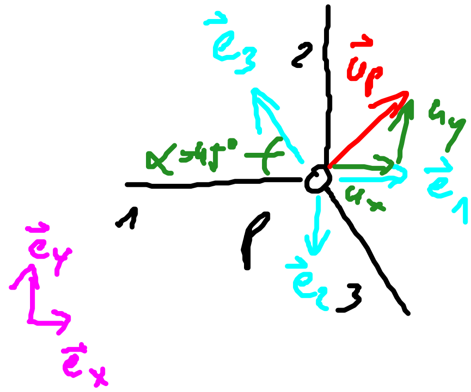
$$\sigma = \frac{F}{A} \implies \sigma_i = \frac{S_i}{A}$$

$$\frac{\Delta l_1}{l_1} = \left(\frac{S_1}{EA} + \alpha_T \Delta T \right) \qquad (3)$$

$$\frac{\Delta l_2}{l_2} = \left(\frac{S_2}{EA} + \alpha_T \Delta T \right) \qquad (4)$$

$$\frac{\Delta l_3}{l_3} = \left(\frac{S_3}{EA} + \alpha_T \Delta T \right) \qquad (5)$$

3.) Kinematische Beziehung:



$$\vec{e}_1 = \vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_2 = -\vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_3 = -1 \cos(\alpha)\, \vec{e}_x + 1 \sin(\alpha)\, \vec{e}_y = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{u}_P = \underbrace{u_x \vec{e}_x + u_y \vec{e}_y}_{\text{erstmal positiv!}} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix}$$

es gilt: $\Delta l_i = \vec{u}_P \cdot \vec{e}_i$

$$\Delta l_1 = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{u_x} \qquad (6)$$

$$\Delta l_2 = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \underline{-u_y} \qquad (7)$$

$$\Delta l_3 = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{\sqrt{2}}{2} u_x + \frac{\sqrt{2}}{2} u_y \qquad (8)$$

$\Rightarrow$ <u>8 Gleichungen</u> für <u>8 Unbekannte</u>

$\Rightarrow$ Damit sind auch statisch unbestimmte Systeme berechenbar!

4.) Auflösen:

Nach σ_i und $\vec{u}_P$

(1), (2) in (3), (4): $\frac{F}{A} = \frac{S_i}{A}$

$$\Delta l_1 = \left(\frac{\cancel{S_3}\,\sigma_3}{E\cancel{A}}\frac{\sqrt{2}}{2} + \alpha_T \Delta T\right) a \qquad (3)'$$

$$\Delta l_2 = \left(\frac{\sigma_3}{E}\frac{\sqrt{2}}{2} + \alpha_T \Delta T\right) a \qquad (4)'$$

in (5) mit (6), (7), (8):

$$\left(\frac{\sigma_3}{E} + \alpha_T \Delta T\right)\sqrt{2}\, a = -\frac{\sqrt{2}}{2}\overbrace{\left(\frac{\sigma_3}{E}\frac{\sqrt{2}}{2} + \alpha_T \Delta T\right) a}^{u_x}$$

$$- \frac{\sqrt{2}}{2}\underbrace{\left(\frac{\sigma_3}{E}\frac{\sqrt{2}}{2} + \alpha_T \Delta T\right) a}_{-u_y}$$

$$\Rightarrow \quad \sigma_3 = -E\alpha_T \Delta T \frac{2\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$$

in (1), (2):

$$\sigma_1 = -E\alpha_T \Delta T \frac{2}{1+\sqrt{2}}$$

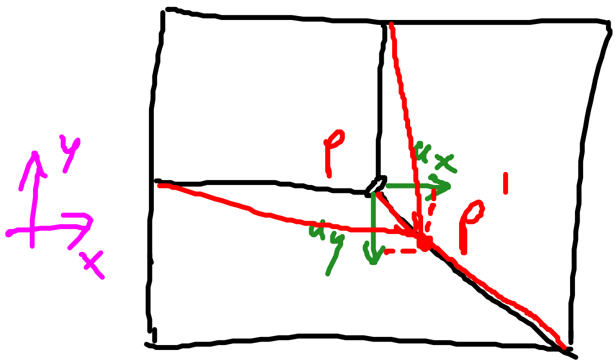
$$\sigma_2 = -E\alpha_T \Delta T \frac{2}{1+\sqrt{2}}$$

Druckspannung!

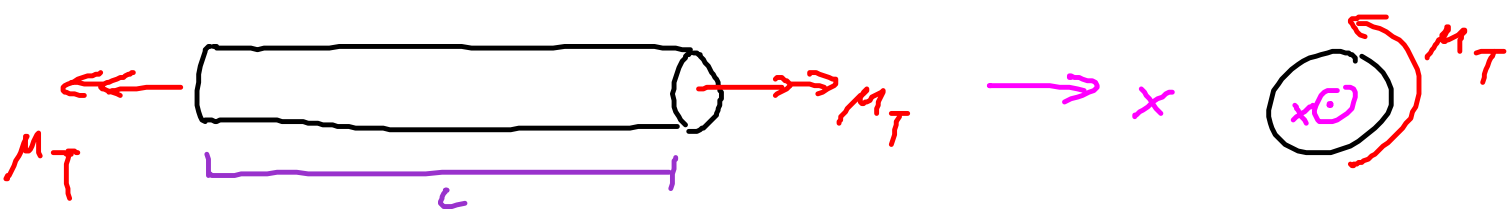
σ_3 in (3), (4):

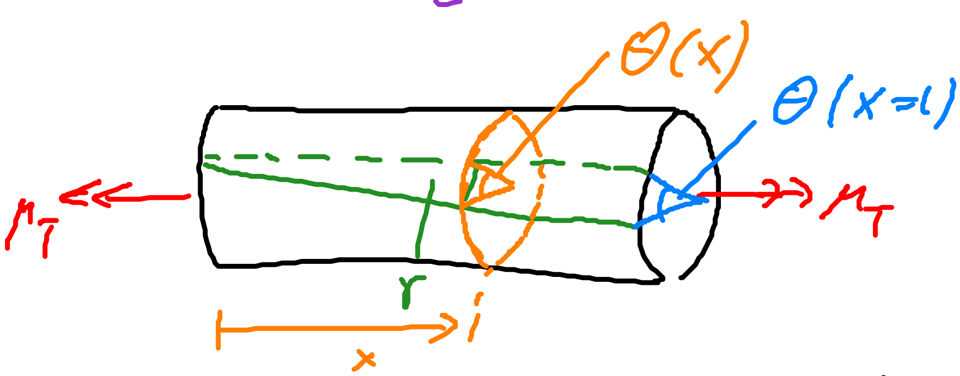
$$u_x = \alpha_T \Delta T a \underbrace{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}}_{\approx 0{,}17}$$

$$u_y = -u_x$$



Torsion:





γ: Schubwinkel

Θ: Verdrehwinkel

Hooke: $\tau = G \cdot \gamma$

Schubspannung — Schubmodul

$$\gamma = \theta' \cdot r \longrightarrow \boxed{\tau = G\theta' \cdot r}$$

Zusammenhang zu M_T:

$$\boxed{M_T = G \underbrace{I_p}_{\text{Flächenträgheitsmoment}} \cdot \underbrace{\theta'}_{\frac{d\theta}{dx}}}$$

Ua	TuA	Ma
21,95	84,97	86,88, 98, 100

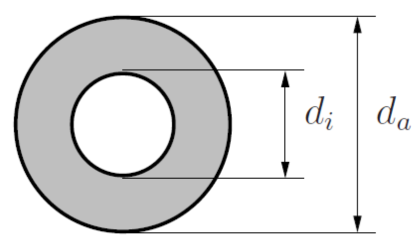
95. Aufgabe

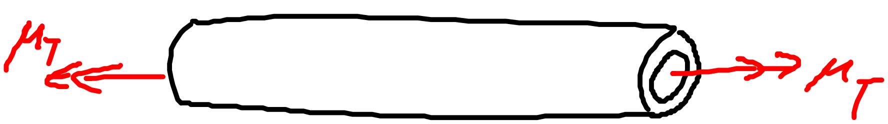
95. Der vorläufige Entwurf einer Welle zur Verbindung eines Motors mit einem Generator sieht eine Hohlwelle mit Innendurchmesser $d_i = 100$ mm und Außendurchmesser $d_a = 150$ mm vor. Die maximal zulässige Schubspannung beträgt $\tau_{zul} = 85$ MPa. Welches maximale Drehmoment kann durch die Welle übertragen werden, wenn

(a) die Welle wie geplant gefertigt wird,

(b) eine Vollwelle gleicher Masse gefertigt wird,

(c) eine Hohlwelle gleicher Masse und Außendurchmesser $d_a = 200$ mm gefertigt wird?





$\Rightarrow M_{T,max}$ für $\tau_{zul} = 85$ MPa ?

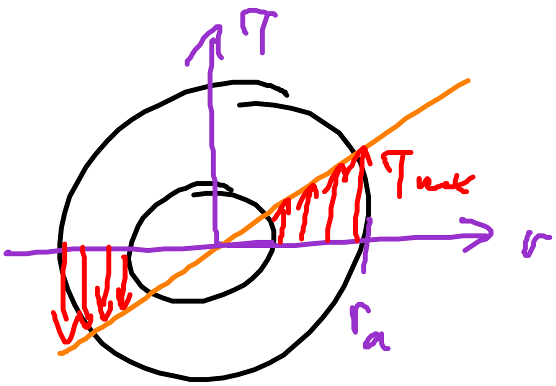
<u>Gleichungen:</u>

$$\left.\begin{aligned} \tau &= G \cdot \gamma \\ \gamma &= \Theta' \cdot r \end{aligned}\right\} \tau = G \cdot \Theta' \cdot r$$

$$M_T = G \cdot \Theta' I_p \Rightarrow \Theta' = \frac{M_T}{G I_p}$$

$$\boxed{\tau = \underbrace{\frac{M_T}{I_p}}_{\text{const.}} \cdot r}$$

<u>Maximale Spannung:</u>



$$\tau_{max} = \tau(r = r_a)$$

$$\tau_{max} = \frac{M_T}{I_p} \cdot r_a$$

$\Longrightarrow$ es darf gerade τ_{zul} erreicht werden!

$$\tau_{zul} = \frac{M_T}{I_p} \cdot r_a \Longrightarrow \boxed{M_{T,max} = \tau_{zul} \cdot \frac{I_p}{r_a}}$$

Bestimmungsgleichung für $M_{T,max}$!

a)

$d_i = 100\,mm$ $\quad$ $d_a = 150\,mm$

$$I_p = \int_A r^2\, dA \underset{2\pi r\, dr}{=} \int_{r_i}^{r_a} 2\pi r^3\, dr = 2\pi \left[\frac{1}{4} r^4\right]_{r_i}^{r_a}$$

$$I_p = \frac{\pi}{2}\left(r_a^4 - r_i^4\right)$$

Einsetzen

$$M^a_{T,max} = \tau_{zul} \cdot \frac{\frac{\pi}{2}\left(r_a^4 - r_i^4\right)}{r_a}$$

$$= 85 \cdot 10^6 \frac{N}{m^2} \cdot \frac{\frac{\pi}{2}\left((75 \cdot 10^{-3}\,m)^4 - (50 \cdot 10^{-3}\,m)^4\right)}{75 \cdot 10^{-3}\,m}$$

$$M^a_{T,max} = 45{,}20\ kNm$$ (Auto: M_T = 200 ... 1000 Nm)

b) Vollquerschnitt gleicher Masse!

$$m = \rho \cdot V = \rho \cdot L \cdot A$$

$$m^a = \rho \cdot L \cdot A^a = \rho \cdot L \cdot \pi\left(r_a^2 - r_i^2\right)$$

gleiche Masse

$$m^b = \rho \cdot L \cdot A^b = \rho \cdot L \cdot \pi r_b^2$$

$$\Rightarrow m^b = m^a \Rightarrow r_b = \sqrt{r_a^2 - r_i^2} = 55{,}9\ mm$$

$$M^b_{T,max} = 85 \cdot 10^6 \frac{N}{m^2} \cdot \frac{\frac{\pi}{2}\left(55{,}9 \cdot 10^{-3}\,m\right)^4}{55{,}9\ mm}$$

$$= 23{,}32 \text{ kNm}$$

$\Longrightarrow$ Belastbarkeit ist gesunken!

c) Hohlwelle mit $d_a = 200 \text{ mm}$

$$r_a^a = 82{,}92 \text{ mm}$$

$$\Longrightarrow M_{T,max}^{c} = 70{,}41 \text{ kNm}$$

$$= 75 \cdot 10^6 \frac{N}{m^2} \cdot \frac{\frac{\pi}{2}\left(\left(100 \cdot 10^{-3} \text{ m}\right)^4 - \left(82{,}92 \cdot 10^{-3}\right)^4\right)}{100 \text{ mm}}$$