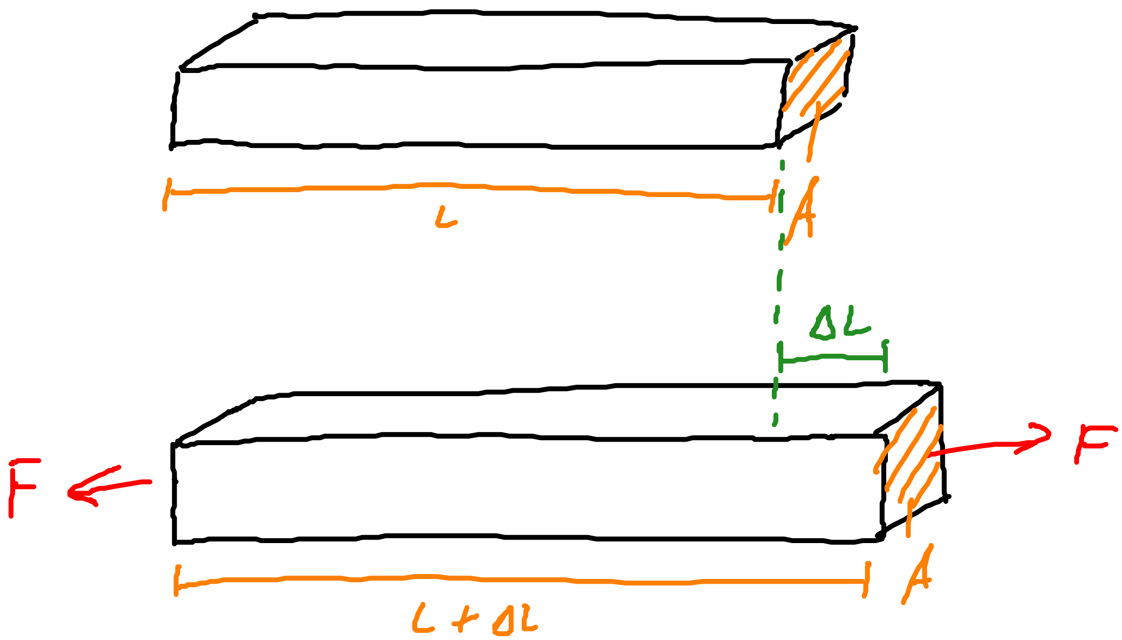
8. Übung : Spannung / Dehnung

Ue	Tut	Ha
79, 93	80, 81, 82	77, 90

1.) Dehnstab

- reale Strukturen sind deformierbar
- ideal elastischer Stab

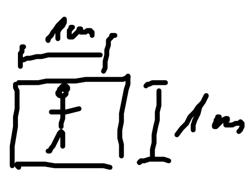


Dehnung: $\boxed{\varepsilon = \frac{\Delta L}{L}}$

$[\varepsilon] = 1$

Spannung: $\boxed{\sigma = \frac{F}{A}} \hat{=} \frac{\text{Kraft}}{\text{Fläche}}$

$[\sigma] = \frac{N}{m^2} = Pa$



Hooke: $\boxed{\sigma = E\,\varepsilon}$, $E \hat{=}$ E-Modul, $[E] = \frac{N}{m^2}$

$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$, $E_{St} = 210\ GPa$

Temperatur: $\boxed{\varepsilon_{th} = \alpha_T \Delta T}$, $[\Delta T] = K$, $[\alpha_T] = \frac{1}{K}$

Temperatur-Dehnungs-koeffizient (α_T)

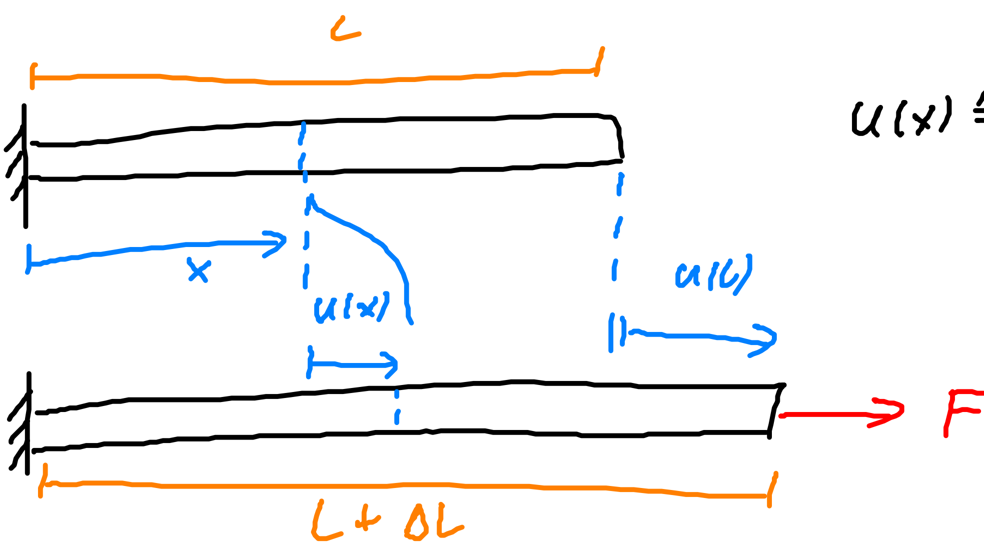
Temperaturänderung (ΔT)

Kombination: Thermische Dehnung & mechanische Dehnung

$$\varepsilon_{ges} = \varepsilon_{mech} + \varepsilon_{th}$$

$$\boxed{\frac{\Delta L}{L} = \frac{\sigma}{E} + \alpha_T \Delta T}$$

2.) Verschiebung:



$u(x) \hat{=}$ Verschiebung des Querschnitts

$$\boxed{\varepsilon = \frac{du}{dx}}$$

3.) Vorgehen:

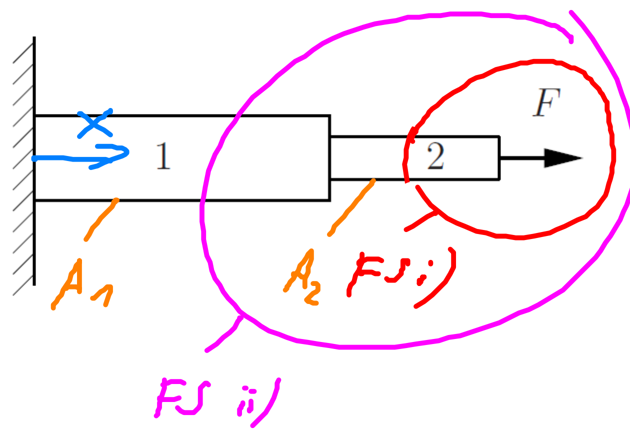
1.) GGB auswerten (F)
2.) Materialgesetz aufstellen
3.) Kinematische Beziehung
4.) Auflösen

$\Big\}$ Vorgehen bei Elastostatik-Aufgaben

79. Aufgabe

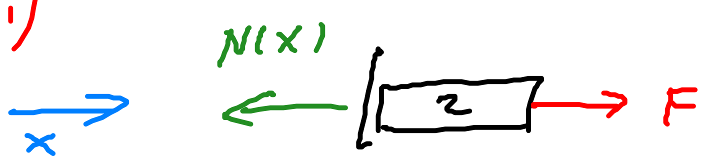
79. Das abgebildete mechanische System besteht aus zwei Stäben (Längen: $l_1 = 10$ cm, $l_2 = 8$ cm, Durchmesser: $d_1 = 3$ cm, $d_2 = 2$ cm, E-Modul: $E_1 = E_2 = 210$ GPa). Am rechten Ende greift die Kraft $F = 20$ kN an.

Wie groß ist die gesamte Längenänderung? (ΔL)



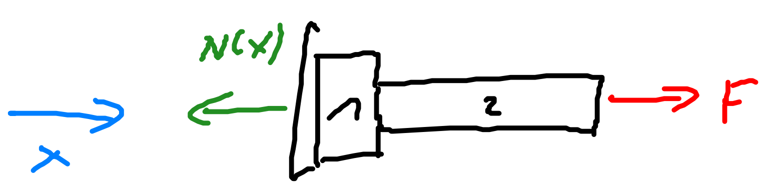
Lösung nach dem Schema!

1.) GGB: i)



$\sum F_x \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow N(x) = F$

ii)



$\sum F_x \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow N(x) = F$

Normalkraft ist konstant F in 1 & 2!

Spannungen: $\sigma_1 = \dfrac{F}{A_1}$ (1)

$$\sigma_2 = \frac{F}{A_2} \quad (2) \qquad \sigma_2 > \sigma_1$$

2.) Materialgesetz:

Hooke-sches Gesetz in beiden Stäben!

$$\sigma = E\,\varepsilon \quad \Rightarrow \quad \sigma_1 = E_1\,\varepsilon_1 \quad (3)$$

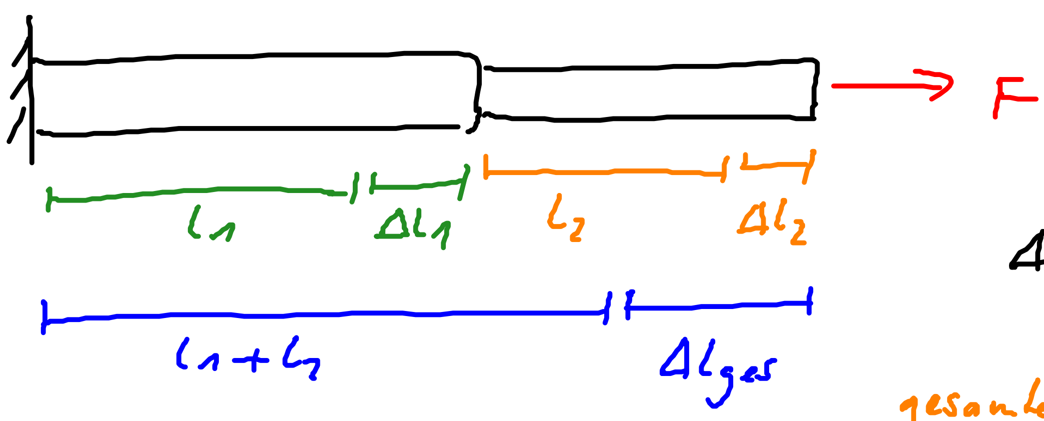
$$\sigma_2 = E_2\,\varepsilon_2 \quad (4)$$

(1), (2) einsetzen:

$$\frac{F}{A_1} = E_1\,\varepsilon_1 \quad (3)'$$

$$\frac{F}{A_2} = E_2\,\varepsilon_2 \quad (4)'$$

3.) Kinematische Beziehungen



$$\Delta l_{ges} = \Delta l_1 + \Delta l_2 \quad (5)$$

gesamte Längenänderung

aus Definition der Dehnung für Stab:

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L} \Rightarrow \Delta L = \varepsilon \cdot L, \quad \Delta l_1 = \varepsilon_1\, l_1 \quad (6)$$

$$\Delta l_2 = \varepsilon_2 l_2 \quad (7)$$

(6), (7) in (5):

$$\Delta l_{ges} = \varepsilon_1 l_1 + \varepsilon_2 l_2$$

mit (3)', (4)':

$$\Delta l_{ges} \underset{\frac{F}{A} = E\varepsilon}{=} l_1 \cdot \frac{F}{E_1 A_1} + l_2 \frac{F}{E_2 A_2}$$

$$= 20 \cdot 10^3 N \left(\frac{1 \cdot 10^{-1} m}{210 \cdot 10^9 N/m^2 \cdot \pi \left(\frac{0{,}3 \cdot 10^{-1}}{2}\right)^2} * \right.$$

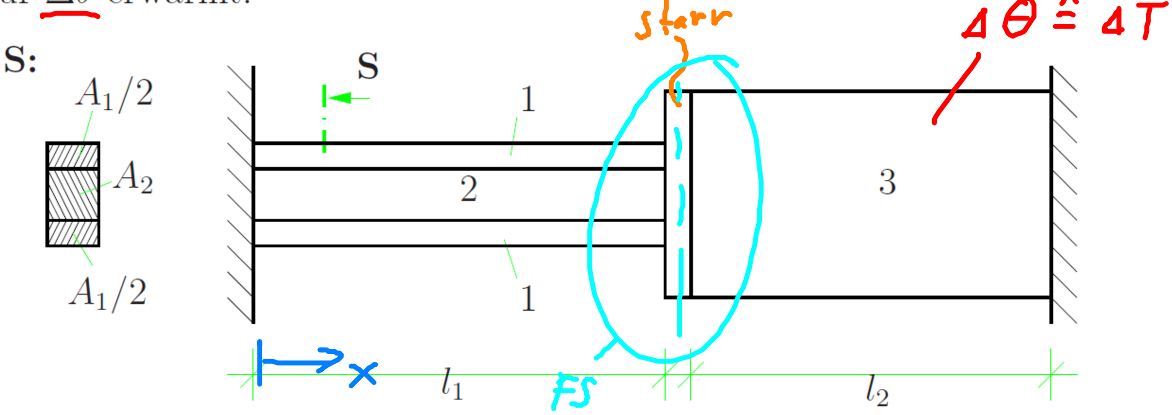
A_i:

$$\left. + \frac{0{,}8 \cdot 10^{-1} m}{210 \cdot 10^5 N/m^2 \cdot \pi \left(\frac{0{,}2 \cdot 10^{-1}}{2}\right)^2} \right)$$

$$= 37{,}73 \cdot 10^{-6} m = 37{,}73 \mu m$$

93. Aufgabe

93. Der skizzierte Stab besteht in seinem rechten Teil 3 aus einem homogenen Werkstoff, in seinem linken Teil (1 und 2) aus einem symmetrisch aufgebauten Verbund-Körper. Zwischen den Teilen des Stabes befindet sich eine starre Platte. Der Stab liegt zunächst spannungsfrei zwischen zwei festen Widerlagern. Dann wird Teil 3 des Stabes um eine Temperatur $\Delta\theta$ erwärmt.



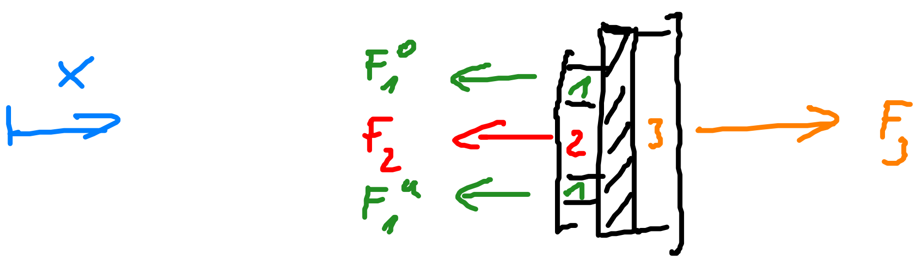
(a) Wie groß sind die Normalspannungen in den drei Querschnittsteilen?

(b) Wie groß ist die Verschiebung der starren Platte?

Geg.: $l_1 = 4,00\text{m}$, $l_2 = 3,50\text{m}$
$A_1 = 300\text{cm}^2$, $E_1 = 2 \cdot 10^4 \text{N/mm}^2$,
$A_2 = 100\text{cm}^2$, $E_2 = 2 \cdot 10^5 \text{N/mm}^2$,
$A_3 = 700\text{cm}^2$, $E_3 = E_1 = 2 \cdot 10^4 \text{N/mm}^2$,
$\alpha_{t3} = 12 \cdot 10^{-6} 1/\text{K}$. $\Delta\theta = 40\text{K}$

a) Normalspannungen: σ_i

1.) GGB auswerten: FS an Platte:



Symmetrie: $F_1^o = F_1^u = F_1$

$$\Sigma F_x \overset{!}{=} 0$$

$$0 = F_3 - F_2 - 2F_1$$

$$F_3 = F_2 + 2F_1 \quad (1)$$

2.) Materialgesetz:

$$\sigma = E\,\varepsilon_{mech}$$

$$\varepsilon = \varepsilon_{mech} + \alpha_T \Delta T = \frac{\sigma}{E} + \alpha_T \Delta T$$

für die 3 Stäbe:

$$\underline{\varepsilon_1} = \frac{\sigma_1}{E_1} + \underbrace{\cancel{\alpha_{T_1} \Delta T_1}}_{=0} = \frac{F_1}{E_1 A_1/2} = \frac{2F_1}{E_1 A_1} \quad (2)$$

$$\sigma = \frac{F}{A}$$

$$\underline{\varepsilon_2} = \frac{\sigma_2}{E_2} = \frac{F_2}{E_2 A_2} \quad (3)$$

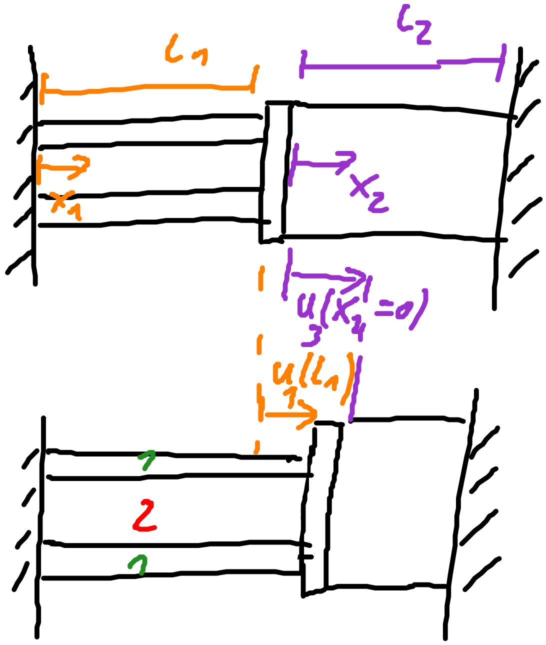
$$\underline{\varepsilon_3} = \frac{\sigma_3}{E_3} + \alpha_T \Delta T = \frac{F_3}{E_3 A_3} + \alpha_T \Delta T \quad (4)$$

6 Unbekannte, 4 Gleichungen

3.) Kinematische Beziehungen:

$\Delta T = 0$:

$\Delta T \neq 0$:



Stäbe bleiben an starren Platte!

$$u_1(x_1=l_1) = u_3(x_2=0) \quad (5)$$

$$u_2(x_1=l_1) = u_3(x_2=0) \quad (6)$$

zusätzlich: $\varepsilon = \frac{du}{dx} = u' \quad \Big| \cdot dx$

$$\varepsilon \, dx = du \quad \Big| \int (\ldots)$$

$$\Rightarrow \quad u(x) = \int \varepsilon \, dx + c$$

aus (2), (3), (4) : ε_i ist konstant!

$$u_1(x_1) = \varepsilon_1 \, x_1 + c_1$$

$$u_2(x_1) = \varepsilon_2 \, x_1 + c_2$$

$$u_3(x_2) = \varepsilon_3 \, x_2 + c_3$$

c_1, c_2, c_3 aus RBen:

$$u_1(x_1 = 0) = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = c_1 \quad \Rightarrow \quad u_1(x_1) = \varepsilon_1 x_1$$

$$u_2 \; (x_1 = 0) = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = c_2 \quad \Rightarrow \quad u_2(x_1) = \varepsilon_2 x_1$$

$$u_3 \; (x_2 = l_2) = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = \varepsilon_3 \cdot l_2 + c_3$$

$$c_3 = - \varepsilon_3 \, l_2$$

$$\Rightarrow \quad u_3(x_2) = \varepsilon_3 \, x_2 - \varepsilon_3 \, l_2$$

in (5), (6):

$$u_1(x_1 = l_1) = u_3(x_2 = 0)$$

$$\varepsilon_1 l_1 = -\varepsilon_3 l_2 \quad (5)' \Rightarrow \Delta l_1 = -\Delta l_3$$

$$u_1(x_1 = l_1) = u_3(x_2 = 0)$$

$$\underbrace{\varepsilon_2 l_1 = -\varepsilon_3 l_2}_{\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}} \quad (6)' \Rightarrow \Delta l_2 = -\Delta l_3$$

4.) Auflösen:

(8), (3), (4) in (5)', (6)'

$$\frac{2F_1}{E_1 A_1} l_1 = -\left(\frac{F_3}{E_3 A_3} + \alpha_T \Delta T\right) l_2 \quad (5)''$$

$$\frac{F_2}{E_2 A_2} l_1 = -\left(\frac{F_3}{E_3 A_3} + \alpha_T \Delta T\right) l_2 \quad (6)''$$

mit:

$$2F_1 + F_2 = F_3 \quad (1)$$

aus (5)''

$$F_1 = -\frac{E_1 A_1}{2} \frac{l_2}{l_1} \left(\frac{F_3}{E_3 A_3} + \alpha_T \Delta T\right)$$

aus (6)''

$$F_2 = -E_2 A_2 \frac{l_2}{l_1} \left(\frac{F_3}{E_3 A_3} + \alpha_T \Delta T\right)$$

in (1):

$$F_3 = \frac{-\alpha_T \Delta T \frac{l_2}{l_1} (A_1 E_1 + A_2 E_2)}{1 + \frac{l_2}{l_1} \frac{A_1 E_1 + A_2 E_2}{A_3 E_3}}$$

o o o

$F_3 = -416 \text{ kN} \longrightarrow \sigma_3 = -5{,}94 \frac{N}{mm^2}$

$F_2 = -320 \text{ kN} \longrightarrow \sigma_2 = -32 \, N/mm^2$

$F_1 = -48 \text{ kN} \longrightarrow \sigma_1 = -3{,}2 \, N/mm^2$

b)

$u_3(x_2 = 0) = -\varepsilon_3 l_2$

$= -0{,}64 \text{ mm}$

$u_1(x_1 = l_1) = -0{,}64$