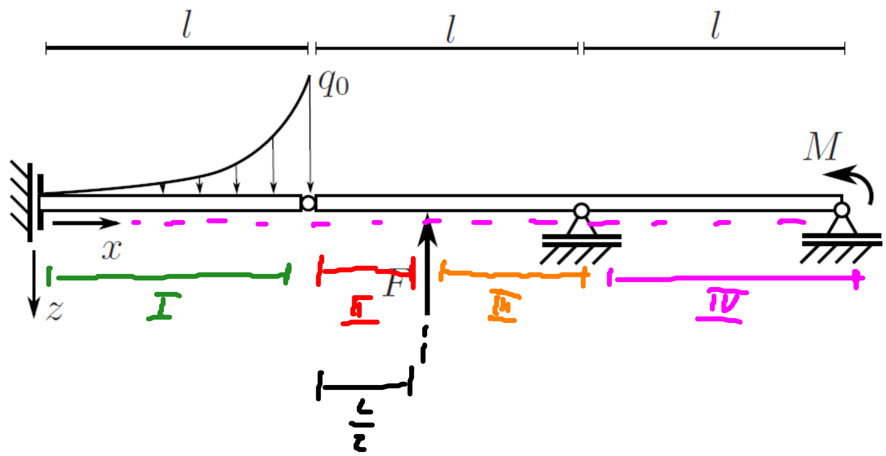
Mechanik I – 7. Übung

1. Das unten abgebildete System aus starren Balken ist in der gezeigten Weise gelagert und durch vielerlei Lasten belastet.

   (a) Wie viele Bereiche sind zur Bestimmung der Schnittlasten notwendig.

   (b) Geben Sie alle nötigen Rand- und Übergangsbedingungen an.

   Geg.: M, l, a, F, q_0.



a) Vier Bereiche, s.o.!

b) RB/ÜB : Q oder M an bestimmter Stelle, an der Q oder M bekannt sind

Vier Bereiche $\Rightarrow$ 8 RB/ÜB

DGL: $Q'(x) = -q(x) \Rightarrow Q(x) = \int -q(x)\,dx + C_1$

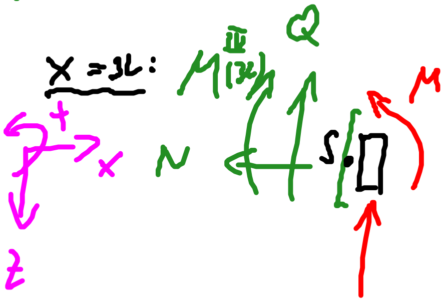
$M'(x) = Q(x) \Rightarrow M(x) = \int Q(x)\,dx + C_2$

$\Rightarrow$ 2 Konstanten für jeden Bereich

x	0	l	$\frac{3}{2}l$	$2l$	$3l$
	(1) $Q^{I}(0)=0$	(2) $M^{I}(l)=0$ (3) $M^{II}(l)=0$ (4) $Q^{I}(l)=Q^{II}(l)$	(5) $M^{II}(\frac{3}{2}l)=M^{III}(\frac{3}{2}l)$ (6) $Q^{III}(\frac{3}{2}l) = F+Q^{II}(\frac{3}{2}l)$	(7) $M^{IV}(2l)=M^{III}(2l)$	$M^{IV}(3l)=M$

Probe

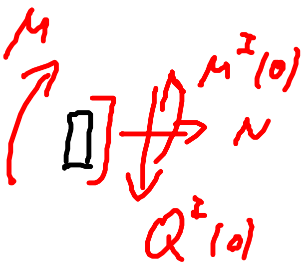
$x = 3l$:



$$\Rightarrow \sum M^{(S)} \stackrel{!}{=} 0, \quad 0 = M - M^{IV}(3l)$$

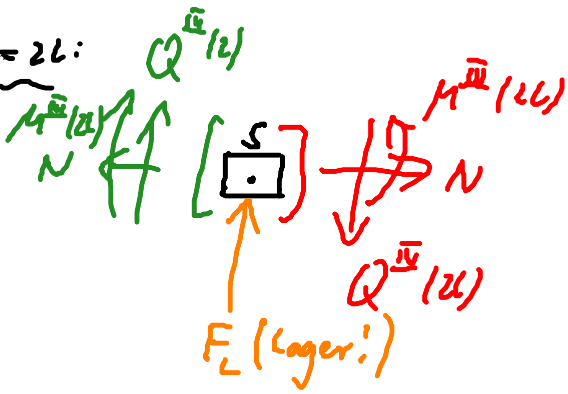
$$M^{IV}(3l) = M$$

$x = 0$:



$$\Rightarrow \sum F_z \stackrel{!}{=} 0, \quad 0 = Q^{I}(0)$$

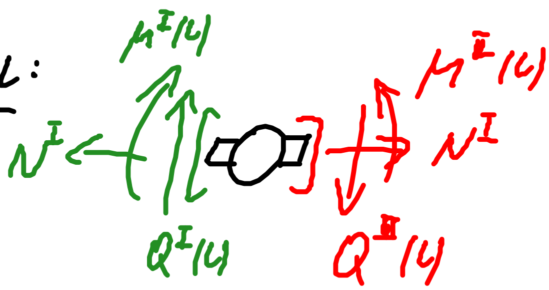
$x = 2l$:



$$\Rightarrow \sum M^{(S)} \stackrel{!}{=} 0, \quad 0 = M^{IV}(2l) - M^{III}(2l)$$

$$M^{IV}(2l) = M^{III}(2l)$$

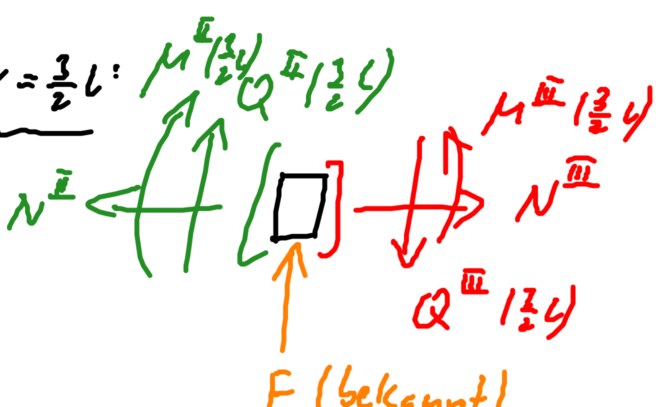
$x = l$:



$$\Rightarrow \sum F_z \stackrel{!}{=} 0, \quad 0 = Q^{II}(l) - Q^{I}(l)$$

$$Q^{II}(l) = Q^{I}(l)$$

$x = \frac{3}{2} l$:



$$\Rightarrow \sum M^{(S)} \stackrel{!}{=} 0$$

$$M^{III}(\tfrac{3}{2}l) = M^{II}(\tfrac{3}{2}l)$$

$$\Rightarrow \sum F_z \stackrel{!}{=} 0, \quad 0 = Q^{III}(\tfrac{3}{2}l) - F - Q^{II}(\tfrac{3}{2}l)$$

$$Q^{III}(\tfrac{3}{2}l) = F + Q^{II}(\tfrac{3}{2}l)$$

Aufgabe 2

2. Der unten abgebildete starre Träger mit der Massenbelegung μ ist gelenkig mit einer Fachwerkskonstruktion gekoppelt und im Punkt A durch ein Festlager an die Umgebung gebunden. Das Fachwerk ist in den Punkten B und C losgelagert. Neben der Einzellast F greift eine quadratische Streckenlast am Träger an. Zusätzlich ist ist ein masseloses, dehnbares Seil um den Punkt D geführt, an dem ein Gewicht mit der Masse m hängt. Um ein umfassendes Bild der Belastungen zu erhalten sollen die folgenden Dinge überprüft beziehungsweise bestimmt werden:

   (a) Statische Bestimmheit.

   (b) Resultierende und Angriffspunkt der Streckenlast .

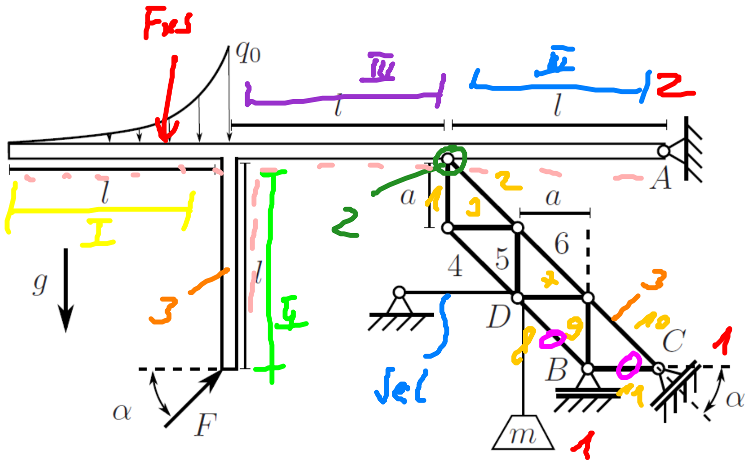
   (c) Trägerschwerpunkt.

   (d) Alle Lagerreaktionen

   (e) Offensichtliche Nullstäbe

   (f) Stabkräfte 3, 4, 5 und 6.

   (g) Querkraft und Biegemoment.



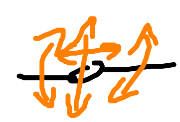
Geg.: m, l, a, $\alpha = \frac{\pi}{4}$, g, F, μ, $q_0 = 6\mu g$.

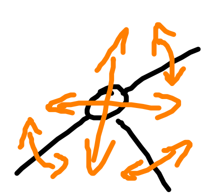
a) Statische Bestimmtheit?

notw. Bed.: $f = r + v \Rightarrow 6 = 4 + 2$ ✓

hinr. Bed: nicht verschieblich oder verspannbar ✓

Einschub:

FHG: 3 3 $\Rightarrow$  4 $\quad v = 2$

FHG: 3 3 3 $\Rightarrow$  5 $\quad v = 4$

b) F_{res} & x_{res}:

i) $F_{res} = \int_0^L q(x)\,dx$, $q(x) = Ax^2 + Bx + C$

$$\left.\begin{aligned} q(0) &= 0 \\ q(L) &= q_0 \\ q'(0) &= 0 \end{aligned}\right\} \left.\begin{aligned} C &= 0 \\ A &= \frac{q_0}{L^2} \\ B &= 0 \end{aligned}\right\} q(x) = \frac{q_0}{L^2}x^2$$

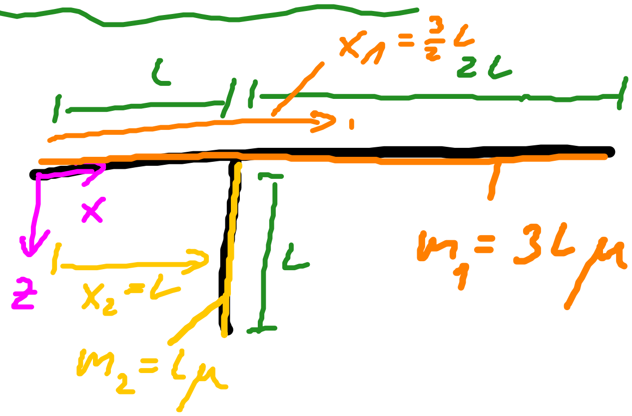
$$F_{res} = \int_0^L \frac{q_0}{L^2}x^2\,dx = \left[\frac{1}{3}\frac{q_0}{L^2}x^3\right]_0^L = \frac{1}{3}q_0 L$$

ii) $$x_{res} = \frac{\int_0^L q(x)\,x\,dx}{\int_0^L q(x)\,dx} = \frac{\int_0^L \frac{q_0}{L^2}x^3\,dx}{\frac{1}{3}q_0 L} = \frac{\left[\frac{1}{4}\frac{q_0}{L^2}x^4\right]_0^L}{\frac{1}{3}q_0 L}$$

SP: $x_s = \frac{\sum x_i m_i}{\sum m_i}$

$$x_{res} = \frac{\frac{1}{4}\cancel{q_0}L^{\cancel{2}}}{\frac{1}{3}\cancel{q_0}\cancel{L}} = \frac{3}{4}L$$

c) Sp des Trägers



$$x_s = \frac{\sum x_i m_i}{\sum m_i}$$

$$z_s = \frac{\sum z_i m_i}{\sum m_i}$$

Massenbelegung μ: $[\mu] = \frac{kg}{m} \Rightarrow m_i = \mu \cdot L_i$

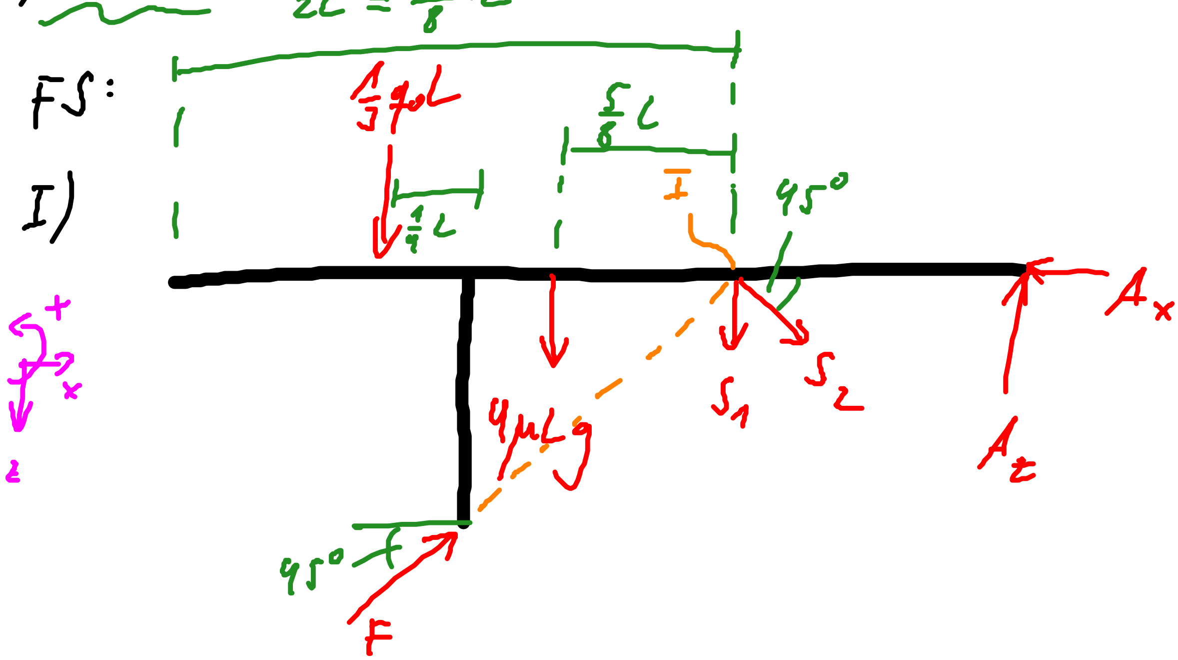
$$x_S = \frac{\frac{3}{2}L \cdot \mu 3L + L\mu L}{\mu 3L + \mu L} = \frac{\frac{9}{2}\cancel{\mu L^2} + \cancel{\mu L^2}}{4\cancel{\mu L}} = \frac{11}{8}L$$

$$z_S = \frac{0 \cdot 3\mu L + \frac{L}{2}\cancel{\mu L}}{4\cancel{\mu L}} = \frac{1}{8}L$$

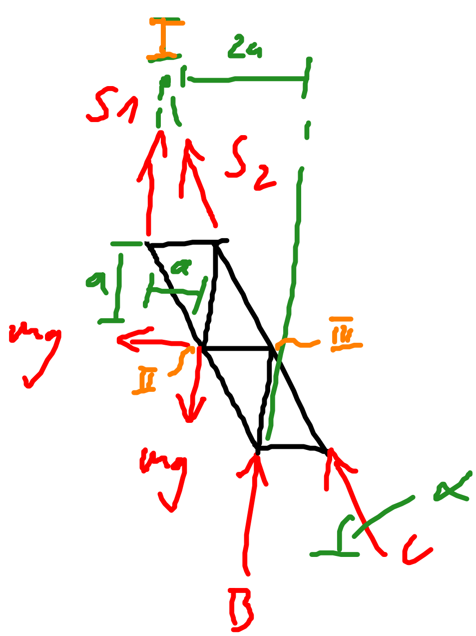
d) LR:

FS:

I)



II)



GGB:

II) $\sum M^{(I)} \stackrel{!}{=} 0, \; 0 = B\,2a - mg\,2a - mg\,a \Rightarrow B = \frac{3}{2} mg$

$\sum M^{(III)} \stackrel{!}{=} 0, \; 0 = mga - S_1 \cdot 2a \Rightarrow S_1 = \frac{1}{2} mg$

$\sum F_x \stackrel{!}{=} 0, \; 0 = -mg - C\underbrace{\frac{\sqrt{2}}{2}}_{\cos(\alpha)} - S\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow C = -S_2 - \frac{2}{\sqrt{2}} mg$

I) $\sum M^{(II)} \stackrel{!}{=} 0, \; 0 = A_z L + 4\mu g L \cdot \frac{5}{8} L + \frac{1}{3} q_0 L \cdot \frac{5}{4} L$

$\Rightarrow A_z = -\frac{5}{2} \mu g L - \frac{1}{3} \cdot 6 \mu g \cdot \frac{5}{4} L$

$= -\frac{5}{2} \mu g L - \frac{5}{2} \mu g L = -5 \mu g L$

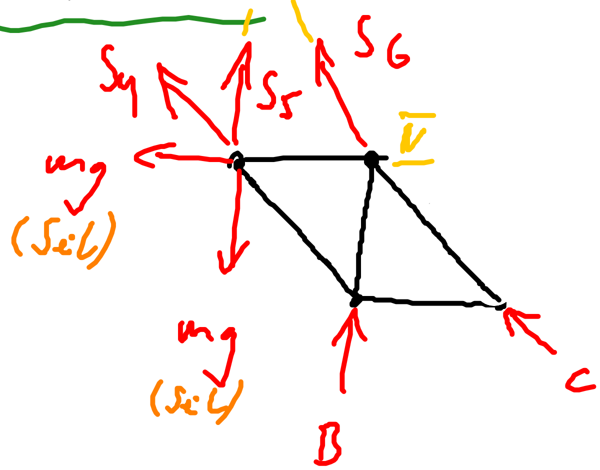
...

e) Nullstäbe

S_8 und S_{11} (s. o.)

f) S_4, S_5, S_6:

FS:



GGB:

$$\Sigma M^{(IV)} \stackrel{!}{=} 0$$

$$0 = Ba - mga - S_4 \frac{\sqrt{2}}{2} a$$

$$S_4 = \frac{2}{\sqrt{2}} (B - mg)$$

$$S_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} mg$$

$$\Sigma M^{(V)} \stackrel{!}{=} 0, \quad 0 = -S_5 a + mga - S_4 \frac{\sqrt{2}}{2} a$$

$$S_5 = mg - \frac{\cancel{\sqrt{2}}}{2} \frac{1}{\cancel{\sqrt{2}}} mg = \frac{1}{2} mg$$

ooo

g) Q und M:

4 Bereiche nötig!

I): $0 \leq x \leq L$:

$$Q^{I}(x) = \int -q(x)\, dx + c_1 = \int -\left(\frac{q_0}{L^2} x^2 + \mu g \right) dx + c_1$$

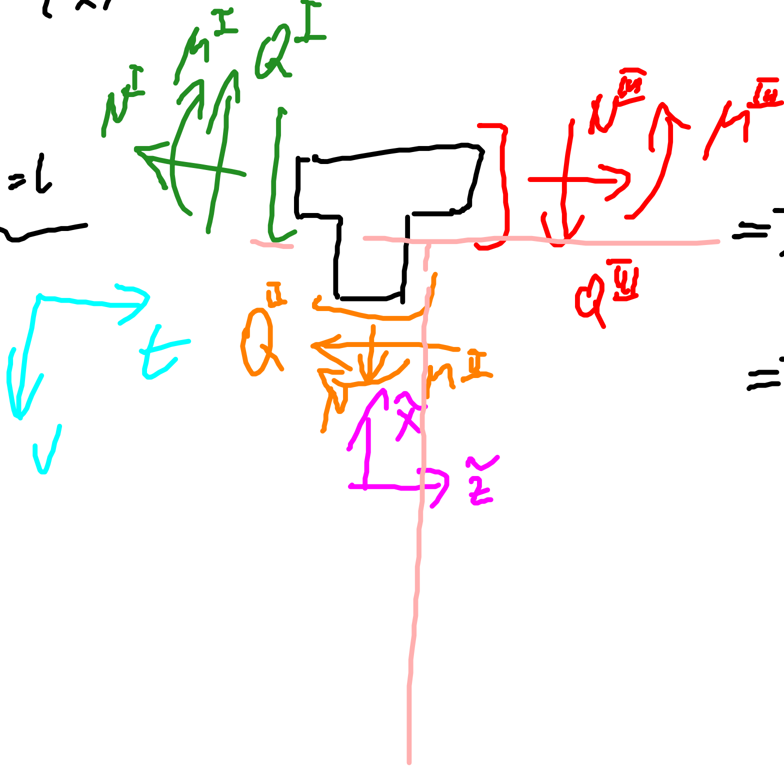
q_2: aus Gewichtskraft!

$$[\mu] = \frac{kg}{m} \Rightarrow q_2(x) = \mu g \Rightarrow \frac{kg}{m} \cdot \frac{m}{s^2} \hat{=} \frac{N}{m}$$

$$Q^{I}(x) = -\frac{1}{3}\frac{q_0}{l^2}x^3 - \mu g x + c_1$$

$$M^{I}(x) =$$

$x = l$



$$\Rightarrow Q^{I}(l) = Q^{III}(l) + N^{II}(l)$$

$$\Rightarrow N^{IV}(l) = Q^{II}(l) + N^{I}(l)$$

Die fehlenden Endergebnisse der verschiedenen Aufgaben:

d) Lagerreaktionen:

Lagerreaktion in *x*-Richtung am Punkt *A:*

$$A_x = F(1+\tfrac{\sqrt{2}}{2}) - 11\mu gl - \tfrac{1}{2}mg \tag{1}$$

Lagerreaktion in *C:*

$$C = \tfrac{2}{\sqrt{2}}(11\mu gl - \tfrac{1}{2}mg) - F \tag{2}$$

Stabkraft 2:

$$S_2 = -\tfrac{2}{\sqrt{2}}(11\mu gl + \tfrac{1}{2}mg) + F \tag{3}$$

e) Stabkräfte:

Stabkräfte 3 und 6:

$$S_6 = -\tfrac{2}{\sqrt{2}}(11\mu gl + mg),\; S_3 = -\tfrac{1}{2}mg \tag{4}$$

f) Schnittlasten:

Die Querkraft und das Moment in den verschiedenen Bereichen (Achtung: jeder Bereich hat eigenes Koordinatensystem):

I) $0 < x_1 < l$:

$$Q^I(x_1) = -\mu gl\left(2\left(\frac{x_1}{l}\right)^3 + \left(\frac{x_1}{l}\right)\right) \tag{5}$$

$$M^I(x_1) = -\frac{1}{2}\mu gl^2\left(\left(\frac{x_1}{l}\right)^4 + \left(\frac{x_1}{l}\right)^2\right) \tag{6}$$

II) $0 < x_2 < l$:

$$Q^{II}(x_2) = -\frac{\sqrt{2}}{2}F \tag{7}$$

$$M^{II}(x_2) = -\frac{\sqrt{2}}{2}Fx_2 \tag{8}$$

und für die Übergangsbedingung am Treffpunkt der Bereiche *I), II)* und *III):*

$$N^{II}(x_2) = \mu g x_2 - \frac{\sqrt{2}}{2}F \tag{9}$$

III) $0 < x_3 < l$:

$$Q^{III}(x_3) = -\mu g x_3 + 4\mu g l + \frac{\sqrt{2}}{2}F \qquad (10)$$

$$M^{III}(x_3) = -\mu g l^2 \left(\frac{1}{2}\left(\frac{x_3}{l}\right)^2 + 4\left(\frac{x_3}{l}\right)\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}F x_3 - \left(\mu g l + \frac{\sqrt{2}}{2}F\right) l \qquad (11)$$

IV) $0 < x_4 < l$:

$$Q^{IV}(x_4) = -\mu g x_4 + 6\mu g l \qquad (12)$$

$$M^{IV}(x_4) = \mu g l^2 \left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x_4}{l}\right)^2 + 6\left(\frac{x_4}{l}\right)\right) - \frac{11}{2}\mu g l^2 \qquad (13)$$

Fragen zu den Ergebnissen der Wiederholungsaufgaben werden in der Sprechstunde ausführlich und gerne beantwortet: **Montag 10-12 Uhr im M 249**.