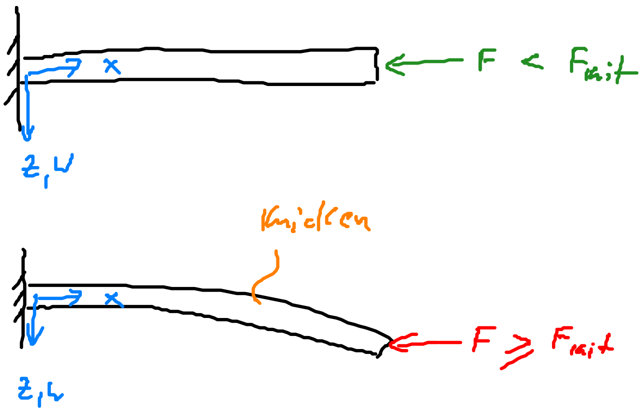
15. Übung – Knicken



Wir wollen wissen:

- Wann knickt der Stab
  $\Rightarrow F_{krit}$
- Wie knickt der Stab
  $\Rightarrow w(x)$

Euler – Knick-DGL

$$\boxed{EI\, \underbrace{w^{IV}(x)}_{w(x) \,=\, \text{Durchsenkung}} = -\underbrace{F}_{\text{Druckkraft}}\, w''(x)}$$

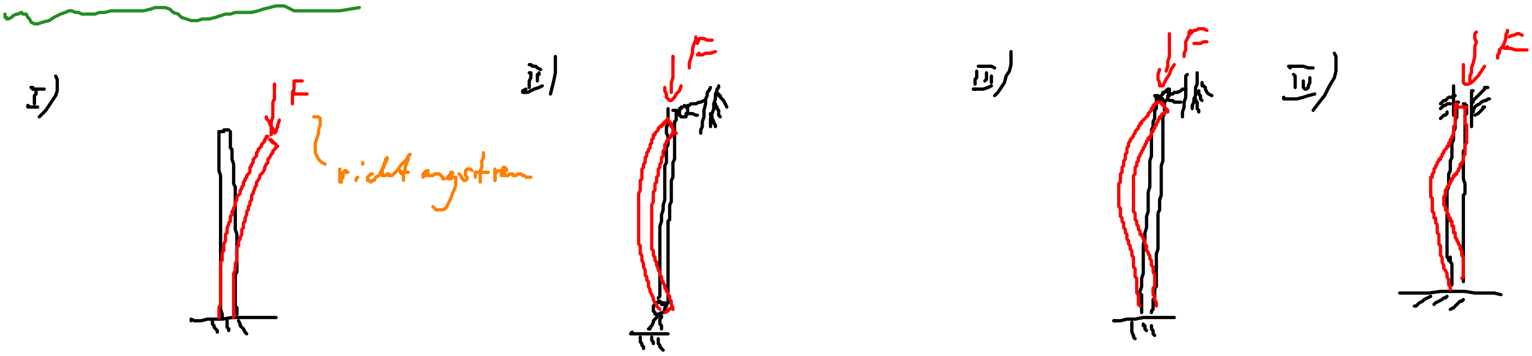
allgemeine Lösung:

$$w^{IV}(x) = -\underbrace{\frac{F}{EI}}_{\lambda^2 = \frac{F}{EI}}\, w''(x) = -\lambda^2 w''(x)$$

$$\boxed{w(x) = A\cos(\lambda x) + B\sin(\lambda x) + Cx + D}$$

4 Terme um alle möglichen RBen zu erfüllen

Euler-Knickfälle:



$$F_{krit}: \quad \frac{EI}{4}\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 < EI\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 < (1{,}43)^2 EI\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 < 4EI\left(\frac{\pi}{L}\right)^2$$

Vorgehen: Wie ist das zu lösen?

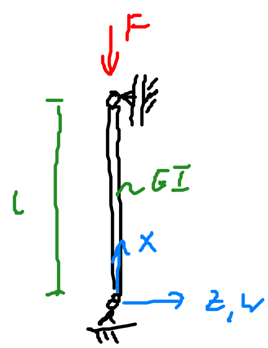
- DGL ; $w^{IV} = -\lambda^2 w''$
- allg. Lösung $w(x) = A\cos(\lambda x) + B\sin(\lambda x) + Cx + D$
- RBen / üBen für die Konstanten
- Auflösen

$\Longrightarrow$ charakteristische Gleichung / Eigenwertgleichung

$\Longrightarrow$ λ (Eigenwerte)

$\Longrightarrow$ erster Eigenwert $\neq 0 \Longrightarrow \lambda_1 \Longrightarrow$ $\boxed{F_{krit} = EI\lambda_1^2}$

Beispiel: Euler-II:



DGL: $w^{IV}(x) = -\lambda^2 w(x)$

allg. Lös: $w(x) = A\cos(\lambda x) + B\sin(\lambda x) + Cx + D$

RBen:

$w(0) = 0$ (1)

$M(0) = 0 \Longrightarrow -\cancel{EI}\, w''(0) = 0$ (2)

$w(l) = 0$ (3)

$M(l) = 0 \Longrightarrow -\cancel{EI}\, w''(l) = 0$ (4)

Auflösen: $w'(x) = -A\lambda\sin(\lambda x) + B\lambda\cos(\lambda x) + C$

$w''(x) = -A\lambda^2\cos(\lambda x) - B\lambda^2\sin(\lambda x)$

(1): $0 = A\cos(0) + B\underbrace{\sin(0)}_{=0} + C\cdot 0 + D \Longrightarrow D = -A = 0$

(2): $0 = -A\lambda^2\cos(0) - B\lambda^2\underbrace{\sin(0)}_{=0} \Longrightarrow A\underbrace{\lambda^2}_{\neq 0} = 0$

(3): $0 = 0\cdot\cos(\lambda l) + B\sin(\lambda l) + Cl - 0 \Longrightarrow B\sin(\lambda l) + Cl = 0$ (3)'

(4): $0 = -0\lambda^2\cos(\lambda l) - \lambda^2 B\sin(\lambda l) = -\underbrace{\lambda^2}_{\neq 0} B\sin(\lambda l)$ (4)'

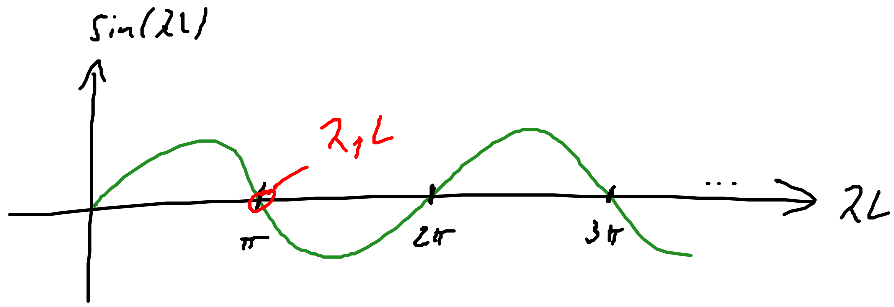
(3)' + (4)': $Cl = 0 \Longrightarrow C = 0$

(a)': $\cancel{B}\sin(\lambda l) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\sin(\lambda l) = 0}$

$B \neq 0$

(B = 0 wäre triviale Lösung)

Eigenwertgleichung / charakteristische Gl.



$\lambda l = n\pi, \quad n = 0, 1, 2, \dots$

$\lambda_1 = \frac{\pi}{l}$

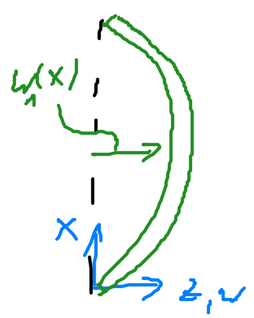
Wichtig ist die kleinste Lösung, die nicht Null ist!

Ergebnis: $\lambda_1 = \frac{\pi}{l}$, $\quad F_{krit} = EI\lambda_1^2 = EI\left(\frac{\pi}{l}\right)^2$ – kritische Last

1. Eigenwert

$w_1(x) = B\sin(\lambda_1 x) = B\sin\left(\frac{\pi}{l}x\right)$

1. Eigenform

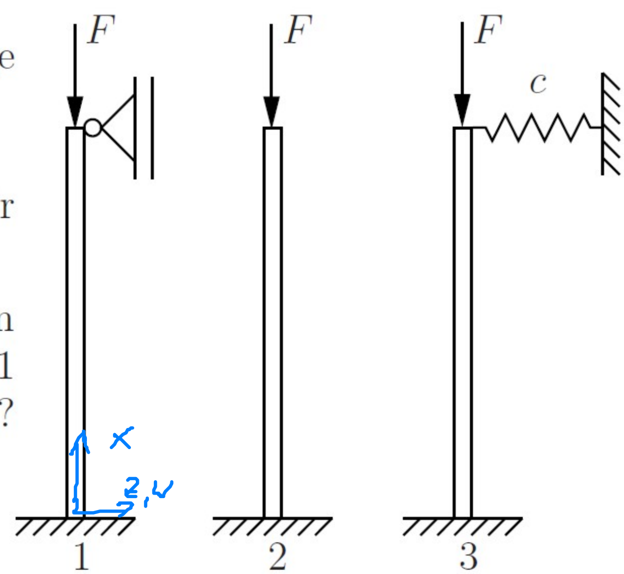


151. Ein Balken der Biegesteifigkeit EI und der Länge l werde auf verschiedene Arten gelagert.

(a) Berechnen Sie die kritischen Lasten F_{krit} für die Varianten 1 bis 3!

(b) Wie müsste das Verhältnis der Balkenlängen l_1/l_2 gewählt werden, damit für Variante 1 und 2 dieselbe kritische Last berechnet wird?

Geg.: F, c, l



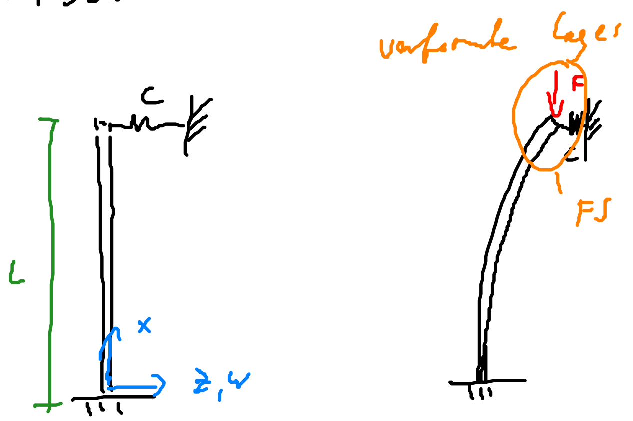
a)

Man erkennt: Fall 3 mit $c = 0 \;\hat{=}\;$ Fall 2 $\Big\}$ Fall 3 Lösung einsetzen

Fall 3 mit $c \to \infty \;\hat{=}\;$ Fall 1

Lösung mit Schema:

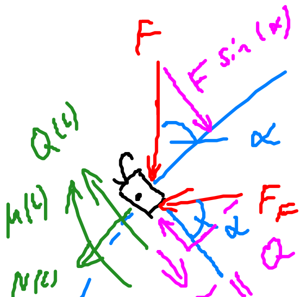
- DGL: $w^{IV}(x) = -\lambda^2 w''(x)$ mit $\lambda^2 = \frac{F}{EI}$
- allg. Lösung: $w(x) = \underline{A}\cos(\lambda x) + \underline{B}\sin(\lambda x) + \underline{C}x + \underline{D}$
- RBen:



$w(0) = 0$ (1)

$w'(0) = 0$ (2)

FS am verformten System, bei $x = L$:



GGB: $\sum M^{(S)} \overset{!}{=} 0,\; 0 = -M(L) \Rightarrow EI\,w''(L) = 0$ (3)

$\sum F_{\tilde{z}} \overset{!}{=} 0,\; 0 = -Q(L) + F\sin(\alpha) - F_F\cos(\alpha)$

$(N(L) = -F)$ aus Herleitung

{ Schnittlasten bei $x = L$ zeigen nicht mehr in x und z

(FS am verformten System: Theorie 2. Ordnung)

$$0 = -Q(L) + F\sin(\alpha) - F_F\cos(\alpha)$$

mit: $\alpha = w'(L)$

$$Q(L) = -EI\,w'''(L)$$

$$F_F = c\,\Delta s = c\,w(L)$$

Auslenkung

$$0 = EI\,w'''(l) + F\underbrace{\sin(w'(l))}_{(\approx w'(l))} - c\,w(l)\underbrace{\cos(w'(l))}_{(\approx 1)}$$

$(\approx w'(l))$ für kleine Winkel (≈ 1)

$$0 = EI\,w'''(l) + F\,w'(l) - c\,w(l) \qquad (4)$$

Auflösen:

(1): $w(0) = 0 = A\cos(0) + B\,\underbrace{\cancel{\sin(0)}}_{=0} + C\,0 + D \Rightarrow D = -A$

(2): $w'(0) = 0 = -\lambda A\,\underbrace{\cancel{\sin(0)}}_{=0} + \lambda B\cos(0) + C \Rightarrow C = -\lambda B$

(3): $w''(l) = 0 = -\lambda^2 A\cos(\lambda l) - \lambda^2 B\sin(\lambda l)$

(4): $0 = EI\left(\lambda^3 A\sin(\lambda l) - B\lambda^3\cos(\lambda l)\right) + F\left(-\lambda A\sin(\lambda l) + \lambda B\cos(\lambda l) - \lambda B\right)$

Fehler! $\quad - c\left(A\cos(\lambda l) + B\sin(\lambda l) - \lambda B l - A\right)$

mit: $\lambda^2 = \frac{F}{EI} \Rightarrow F = \lambda^2 EI$

(4): $0 = \cancel{EI\lambda^3\left(A\sin(\lambda l) - B\cos(\lambda l)\right)} + \lambda^2 EI\left(\cancel{-A\sin(\lambda l) + B\cos(\lambda l)} - B\right)$

$- c\left(\cancel{A\cos(\lambda l) + B\sin(\lambda l)} - \lambda B l - A\right)$

(3): $0 = +\underbrace{\cancel{\lambda^2}}_{\neq 0} A\cos(\lambda l) + \underbrace{\cancel{\lambda^2}}_{\neq 0} B\sin(\lambda l)$

damit:

(3): $0 = A\cos(\lambda l) + B\sin(\lambda l)$

(4): $0 = -\lambda^3 EI\,B + c\lambda B l + cA$

Systematisch lösen: (3), (4) in Matrix-Schreibweise

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \cos(\lambda l) & \sin(\lambda l) \\ c & c\lambda l - EI\lambda^3 \end{bmatrix}}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$\underline{K}$ = Koeffizientenmatrix

Es gibt nur dann eine nichttriviale Lösung $(A, B \neq 0)$, wenn

$$\det(\underline{K}) \overset{!}{=} 0 \;!!$$

$$\det(\underline{K}) = \cos(\lambda l)\left(c\lambda l - EI\lambda^3\right) - c\sin(\lambda l) = 0$$

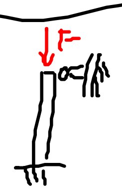
$$\cos(\lambda l)\left(c\lambda l - EI\lambda^3\right) = c\sin(\lambda l) \quad \Big| : c\cos(\lambda l)$$

$$\frac{\left(\cancel{c}\lambda l - \frac{EI}{c}\lambda^3\right)}{\cancel{c}} = \tan(\lambda l)$$

$$\Rightarrow \boxed{\tan(\lambda l) = \lambda l\left(1 - \frac{EI(\lambda l)^2}{c\; l^3}\right)}$$

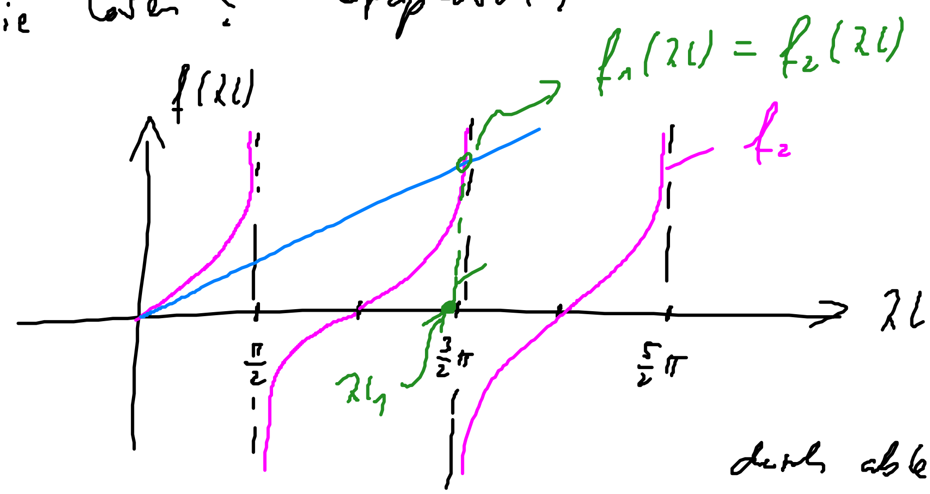
Eigenwertgleichung / charakteristische Gleichung!

Lösen für die 3 Fälle:

Fall 1: 

$\Rightarrow \quad c \longrightarrow \infty, \quad \boxed{\tan(\lambda l) = \lambda l}$

Wie lösen? Graphisch!



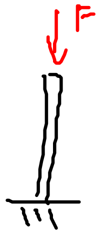
$f_1 = \lambda L$

$f_2 = \tan(\lambda l)$

durch ablesen: $\lambda_1 l \approx 4{,}5$

kritische Last: $F_{krit} = EI\lambda_1^2 = EI\left(\frac{4,5}{L}\right)^2$

Fall 2:



$c = 0$

$$\tan(\lambda l) = \lambda l\left(1 - \underbrace{\frac{EI(\lambda l)^2}{cL^3}}_{-\infty}\right) \longrightarrow \tan(\lambda l) = -\infty$$

$$\lambda_1 l = \frac{\pi}{2}$$

kritische Last: $F_{krit} = EI\lambda_1^2 = EI\left(\frac{\pi}{2L}\right)^2$

Fall 3:

Wie lösen? Numerisch in Abhängigkeit von c

Matlab, Mathematica, ...