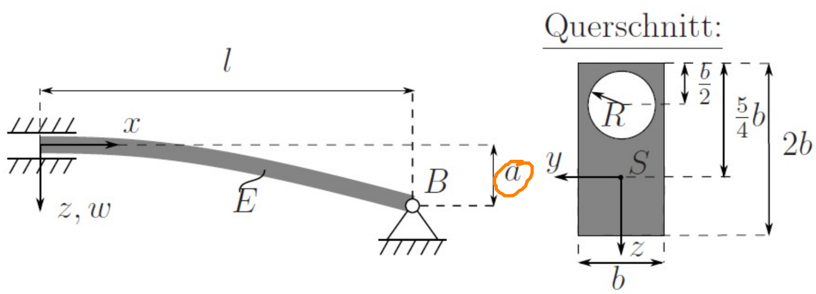
2. Ein Träger (Länge l, E-Modul E und skizzierter Querschnitt) soll wie dargestellt gelagert sein. Durch Einbaufehler (Vorspannung) ist das Lager an der Stelle B um a abgesenkt. Im Folgenden sollen die Auswirkungen des Einbaufehlers auf das Bauteil bestimmt werden.



(a) Bestimmen Sie das axiale Flächenträgheitsmoment I_y des rechteckigen Profils (Breite b, Höhe $2b$) mit kreisförmiger Aussparung (Radius $R = \sqrt{\frac{2}{3\pi}}b$) bezüglich des eingezeichneten Schwerpunktkoordinatensystems.

Hinweis: Benutzen Sie für die Rechnungen in (b)-(e) als Abschätzung:

$$\boxed{I_y = \frac{1}{3}b^4}.$$

(b) Bestimmen Sie die Absenkung des Balkens $w(x)$.

(c) Wie groß ist die Lagerkraft in z-Richtung in B?

(d) Wo tritt die maximale Zug-, und wo die maximale Druckspannung auf?

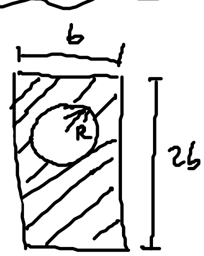
(e) Wie groß darf a höchstens sein, damit die zulässige Zugspannung σ_{zul} nicht überschritten wird?

Geg.: l, E, a, $R = \sqrt{\frac{2}{3\pi}}b$, b, σ_{zul}

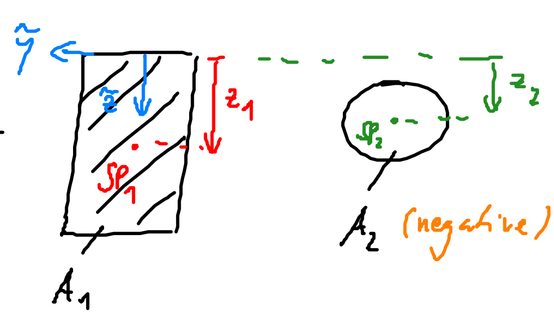
a) I_y bezügl Sp :

i) z_{sp} :

$R = \sqrt{\frac{2}{3\pi}}\,b$



$\hat{=}$



$= \frac{b}{2}$ (Skizze)

; $z_{sp} = \frac{\sum z_i A_i}{\sum A_i}$

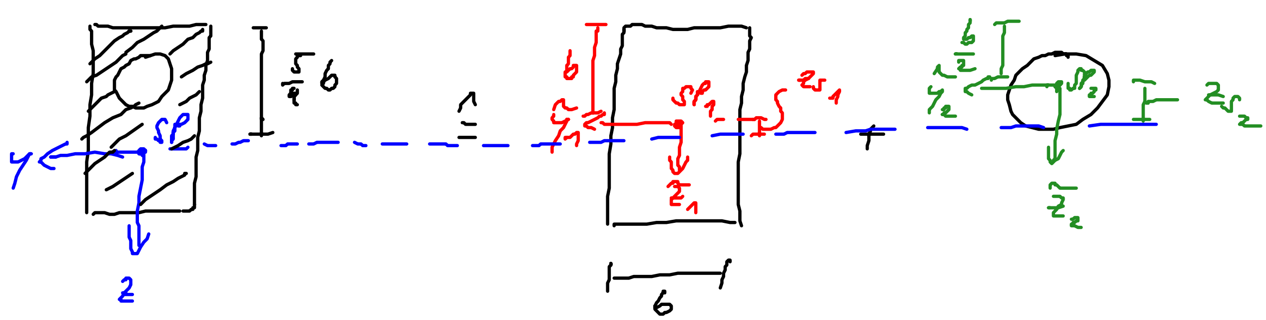
i	A_i	z_i	$z_i A_i$
1	$2b^2$	b	$2b^3$
2	$-\frac{2}{3}b^2$	$\frac{b}{2}$	$-\frac{1}{3}b^3$
Σ	$\frac{4}{3}b^2$	$-$	$\frac{5}{3}b^3$

$$A_1 = 2b^2$$

$$A_2 = -\pi R^2 = -\pi\left(\left(\frac{2}{3\pi}\right)^{1/2}\right)^2 b^2 = \frac{2}{3}b^2$$

$$\Longrightarrow \quad z_{sp} = \frac{\frac{5}{\cancel{3}}b^{\cancel{3}}}{\frac{4}{\cancel{3}}\cancel{b^2}} = \frac{5}{4}b$$

ii) I_y :



$$I_y = \sum_{i=1}^{2} I_{\tilde{y}_i} + \sum_{i=1}^{2} (z_{s_i})^2 A_i$$

i	A_i	z_{s_i}	$z_{s_i}^2$	$z_{s_i}^2 A_i$	$I_{\tilde{y}_i}$
1	$2b^2$	$\frac{1}{4}b$	$\frac{1}{16}b^2$	$\frac{1}{8}b^4$	$\frac{2}{3}b^4$
2	$-\frac{2}{3}b^2$	$\frac{3}{4}b$	$\frac{9}{16}b^2$	$-\frac{18}{48}b^4$	$-\frac{1}{9\pi}b^4$

NR.: $z_{s_1} = \left|b - \frac{5}{4}b\right| = \left|-\frac{1}{4}b\right|$, $I_{\tilde{y}_1} = \frac{1}{12}BH^3 = \frac{1}{12}b(2b)^3 = \frac{8}{12}b^4$

$z_{s_2} = \left|\frac{b}{2} - \frac{5}{4}b\right| = \left|-\frac{3}{4}b\right|$, $I_{\tilde{y}_2} = -\frac{\pi}{4}R^4 = -\frac{\pi}{4}\left(\sqrt{\frac{2}{3\pi}}\,b\right)^4$

$$= -\frac{\pi}{4}\left(\left(\frac{2}{3\pi}\right)^{\cancel{1/2}\;2}\right)^{\cancel{4}} \cdot b^4 = -\frac{1}{9\pi}b^4$$

$$I_y = \frac{2}{3}b^4 + \frac{1}{8}b^4 - \frac{1}{9\pi}b^4 - \frac{18}{48}b^4 = \frac{5}{12}b^4 - \frac{1}{9\pi}b^4$$

b) w(x):

$$(EI\,w''(x))'' = q(x) = 0$$

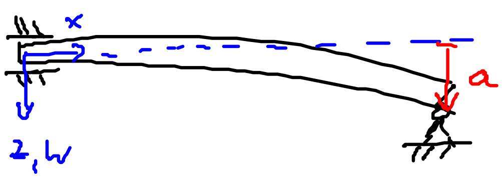
$$EI\,w''' = C_1$$

$$EI\,w'' = C_1 x + C_2$$

$$EI\,w' = \frac{1}{2} C_1 x^2 + C_2 x + \underbrace{\cancel{C_3}}_{=0} \Rightarrow 0 = 0 + C_3 \Rightarrow C_3 = 0$$

$$EI\,w = \frac{1}{6} C_1 x^3 + \frac{1}{2} C_2 x^2 + \underbrace{\cancel{C_3}}_{=0} x + \underbrace{\cancel{C_4}}_{=0} \Rightarrow 0 = 0 + C_4 \Rightarrow C_4 = 0$$

Konstanten aus RBen: 4 RBen!



$x = 0$: $w(0) = 0$ (1)

$w'(0) = 0$ (2)

$x = l$: $w(l) = a$ (3)

$M(l) = 0 \Rightarrow -EI\,w''(l) = 0$ (4)

aus (3):

$$EI\,a = \frac{1}{6} C_1 l^3 + \frac{1}{2} C_2 l^2 \Rightarrow EI\,a = \frac{1}{6} C_1 l^3 - \frac{1}{2} C_1 l^3 = -\frac{1}{3} C_1 l^3$$

$$C_1 = \frac{-3EIa}{l^3}$$

aus (4):

$$0 = C_1 l + C_2 \Rightarrow C_2 = -C_1 l$$

$$C_2 = \frac{3EIa}{l^2}$$

einsetzen:

$$\cancel{EI}\,w(x) = -\frac{3\cancel{EI}a}{6l^3} x^3 + \frac{1}{2}\frac{3\cancel{EI}a}{l^2} x^2$$

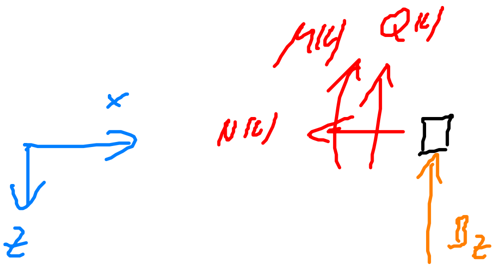
$$w(x) = -\frac{a}{2l^3} x^3 + \frac{3a}{2l^2} x^2$$

c) Lagerkraft in z bei B:

$\Longrightarrow$ aus $Q(x)$ (Schnittlasten)

$$-EI\,w'''(x)$$

FS bei $x = l$:

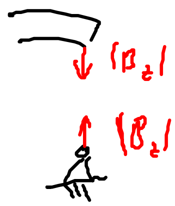


GGB: $B_z = -Q(l) = EI\,w'''(l)$

$$B_z = C_1 = -\frac{3EIa}{l^3}$$

mit $I_y = \frac{1}{3}b^4$:

$$B_z = -\frac{\cancel{3}\,E b^4 a}{\cancel{3}\,l^3}$$



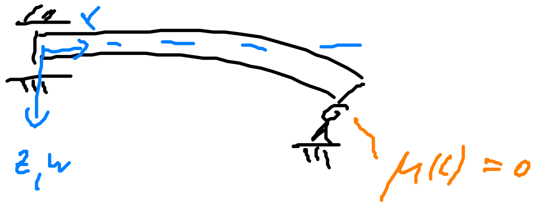
d) Wo tritt σ_{max}^{Druck} und σ_{max}^{Zug} auf?

$$\sigma = \underbrace{\cancel{\frac{N}{A}}}_{=0} + \frac{M_y}{I_y} z - \underbrace{\cancel{\frac{M_z}{I_z}}}_{=0} \cdot y = \frac{M_y}{I_y} \cdot z$$

- Wo ist $M(x)$ maximal? $\Longrightarrow x_{max}$
- Wo ist $\sigma(x_{max}) < 0$, wo ist $\sigma(x_{max}) > 0$?

$\Longrightarrow$ Spannung ist Randfaser am größten!

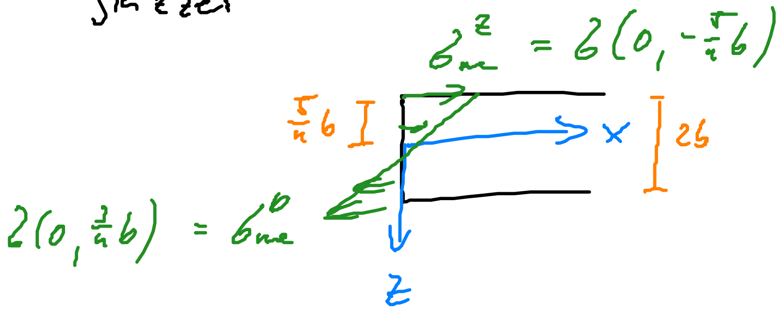
Idee: $q(x) = 0 \Longrightarrow Q = \text{konst.} \Longrightarrow M = \text{linear}$



$$\Longrightarrow M_{max} \text{ bei } x = 0$$

$$M_{max} < 0$$

Skizze:



$$\sigma_{max} = \underbrace{\frac{M_{max}}{I}}_{<0} z$$

$$\sigma_{max}^z = \sigma\left(x = 0, z = -\frac{5}{4}b\right)$$

$$\sigma_{max}^b = \sigma\left(x = 0, z = \frac{3}{4}b\right)$$

e) $\underline{a \text{ damit } \sigma_{max}^z \le \sigma_{zul}}$:

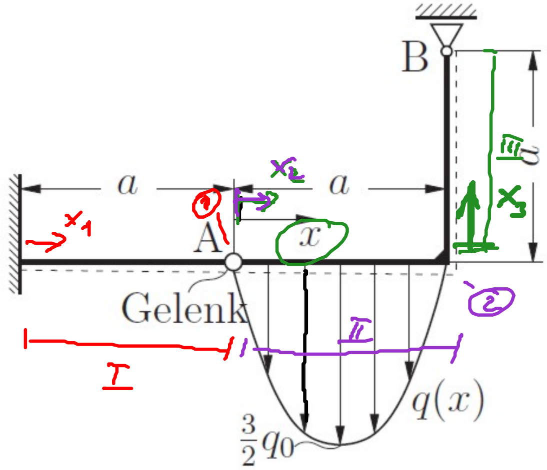
$$M(x=0) = -EIw'' = -C_2$$

$$\sigma_{zul} \ge \sigma_{max}^z = \frac{M_{max}}{I}\left(-\frac{5}{4}b\right) = -\frac{C_2}{I}\left(-\frac{5}{4}b\right)$$

$$\sigma_{zul} \ge -\frac{3E\cancel{I}\,a}{l^2\,\cancel{I}}\left(-\frac{5}{4}b\right) = \frac{15Eb}{4l^2}\cdot a$$

$$a \le \frac{\sigma_{zul}\cdot 4l^2}{15Eb}$$

1. Das skizzierte Tragwerk wird auf dem waagerechten Teil des gewinkelten Trägers durch eine quadratische Streckenlast $q(x)$ belastet. Es sollen die Schnittlasten $\cancel{F_n}(x)$ N, $\cancel{F_q}(x)$ Q und $M_b(x)$ y bestimmt werden.



(a) Führen Sie eine Bereichseinteilung durch und geben Sie jeweils die Schnittlastdifferentialgleichungen an.

(b) Formulieren Sie die Rand- und Übergangsbedingungen.

(c) Berechen Sie die Schnittlasten.

Geg.: a, q_0, $q(x) = -6\frac{q_0}{a^2}x^2 + 6\frac{q_0}{a}x$

a) Neuer Bereich:

- Geometrie unstetig (Knick, Lager, ...) (1, 2)
- Einzellast (M, F)
- Wenn q(x) sich ändert (1, 2)

I) $0 \le x_1 \le a$:

$$Q_I' = -q(x_1) = 0 \Rightarrow Q_I = C_1$$

$$M_I' = Q_I \Rightarrow M_I = C_1 x_1 + C_2$$

$$N_I' = 0 \Rightarrow N_I = D_1$$

II) $0 \le x_2 \le a$:

$$Q_{II}' = -\left(-6\frac{q_0}{a^2}x_2^2 + 6\frac{q_0}{a}x_2\right)$$

$$Q_{II} = \int\left(6\frac{q_0}{a^2}x_2^2 - 6\frac{q_0}{a}x_2\right)dx = 2\frac{q_0}{a^2}x_2^3 - 3\frac{q_0}{a}x_2^2 + C_3$$

$$M_{II} = \frac{1}{2}\frac{q_0}{a^2}x_2^4 - \frac{q_0}{a}x_2^3 + C_3 x_2 + C_4$$

$$N_{II}' = 0 \Rightarrow N_{II} = D_2$$

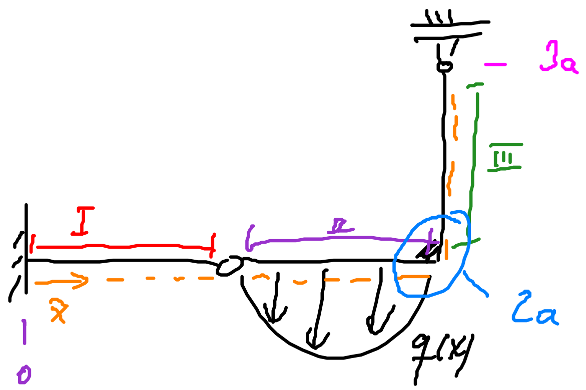
III) $0 \le x_3 \le a$: $Q_{III}' = 0 \Rightarrow Q_{III} = C_5$

$$M_{III} = C_5 x_3 + C_6$$

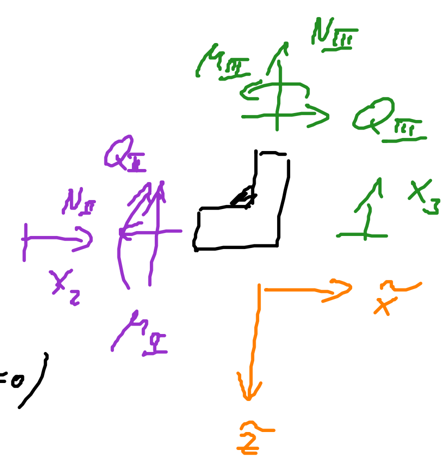
$$N_{III}' = 0 \Rightarrow N_{III} = D_3$$

keine Normalkraftschüttung ($q_x(x) = 0$), Bsp.: Gewicht!

b) RBen / ÜBen



FS bei $\tilde{x} = 2a$:



$\tilde{x}$	$N(x)$	$Q(x)$	$M(x)$
0	–	–	–
a			
2a			$M_{II}(x_2 = a) = M_{III}(x_3 = 0)$
3a	–	$Q_{III}(x_3 = a) = 0$	$M_{III}(x_3 = a) = 0$

$$\sum F_{\tilde{x}} \stackrel{!}{=} 0,\quad 0 = -N_{II} + Q_{III} \Rightarrow N_{II}(x_2 = a) = Q_{III}(x_3 = 0)$$

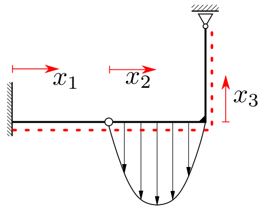
$$\sum F_{\tilde{z}} \stackrel{!}{=} 0,\quad 0 = -Q_{II} - N_{III} \Rightarrow N_{III}(x_3 = 0) = -Q_{II}(x_2 = a)$$

Übung

Aufgabe 1

(a) Die Einteilung der Bereiche erfolgt gemäß der Skizze in lokalen Koordianten. Dabei gibt die gestrichelte Linie die positive z-Richtung in jedem Bereich an. Die Koordinate in der die Steckenlast angegeben ist fällt mit der x-Koordinate im zweiten Bereich zusammen:

$$x \equiv x_2 \quad \Rightarrow \quad q(x_2) = -6\frac{q_0}{a^2}x_2^2 + 6\frac{q_0}{a}x_2 \quad . \tag{1}$$



Die Schnittlastdifferentialgleichungen lauten:

$$\frac{\mathrm{d}N(x_i)}{\mathrm{d}x_i} = 0 \quad \forall i \tag{2}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2M(x_2)}{\mathrm{d}x_2^2} = \frac{\mathrm{d}Q(x_2)}{\mathrm{d}x_2} = -q(x_2) \tag{3}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2M(x_j)}{\mathrm{d}x_j^2} = \frac{\mathrm{d}Q(x_j)}{\mathrm{d}x_j} = 0 \quad j = 1,3 \quad . \tag{4}$$

Die Integration der bereichsweise gültigen Schnittlastdifferentialgleichung liefert:

$$\int (2)\ \mathrm{d}x_i = N(x_i) = E_i \quad \text{mit } i = 1,2,3 \tag{5}$$

$$\int (4)\ \mathrm{d}x_j = Q(x_j) = C_j \quad \text{mit } i = 1,3 \tag{6}$$

$$\int (6)\ \mathrm{d}x_j = M(x_j) = C_j x_j + D_j \tag{7}$$

sowie

$$\int (3)\ \mathrm{d}x_2 = Q(x_2) = \int \left(6\frac{q_0}{a^2}x_2^2 - 6\frac{q_0}{a}x_2\right)\mathrm{d}x_2 \tag{8}$$

$$= \left[\frac{6}{3}\frac{q_0}{a^2}x_2^3 - \frac{6}{2}\frac{q_0}{a}x_2^2\right] + C_2 \tag{9}$$

$$= 2\frac{q_0}{a^2}x_2^3 - 3\frac{q_0}{a}x_2^2 + C_2 \tag{10}$$

$$\int (10)\ \mathrm{d}x_2 = M(x_2) = \frac{1}{2}\frac{q_0}{a^2}x_2^4 - \frac{q_0}{a}x_2^3 + C_2x_2 + D_2 \tag{11}$$

Um die Verläufe der Normalkraft zu erhalten müssen also die drei Integrationskonstanten E_1, E_2 und E_3 über Rand- und Übergangsbedingungen (in $N(x)$) bestimmt werden. Für Querkraft- und Biegemomentenverlauf sind mit den Konstanten C_k und D_k mit $k = 1,2,3$ sechs Unbekannte zu ermitteln. Es müssen also sechs Rand- und Übergangsbedingungen an $Q(x)$ und $M(x)$ angegeben werden.

(b) Rand und Übergangsbedingungen:
Die *feste Einspannung* bei $x_1 = 0$ liefert aufgrund der wirkenden Lagerreaktionen (unbekannt!) keine Randbedingungen an die Schnittlasten.
Im *Gelenk A* sind Normal- und Querkraft stetig. Zudem kann hier kein Moment übertragen werden. Damit ist das Biegemoment hier stetig und gleich Null.

$$\boxed{N_1(a) = N_2(0)} \tag{12}$$

$$\boxed{Q_1(a) = Q_2(0)} \tag{13}$$

$$\boxed{M_1(a) = 0} \tag{14}$$

$$\boxed{M_2(0) = 0} \tag{15}$$

Am *rechtwinkligen Knick* werden die jeweiligen Querkräfte des einen Abschnitts von den Normalkräften des anderen Abschnitts aufgenommen. Die Vorzeichen macht man sich leicht an einem Freischnitt klar. Das Biegemoment ist hier stetig.

$$\boxed{N_2(a) = +Q_3(0)} \tag{16}$$

$$\boxed{Q_2(a) = -N_3(0)} \tag{17}$$

$$\boxed{M_2(a) = +M_3(0)} \tag{18}$$

Das *Loslager A* nimmt weder Momente noch Kräfte in z_3-Richtung auf.

$$\boxed{Q_3(a) = 0} \tag{19}$$

$$\boxed{M_3(a) = 0} \tag{20}$$

Damit liegen neun Randbedingungen an $N(x), M(x)$ und $Q(x)$ für neun Unbekannte Integrationskonstanten vor.

(c) In die integrierten Lösungen für die Schnittlasten sind nun die Randbedingungen einzusetzen.

$$(19) \text{ in } (6) \quad \Rightarrow \quad Q_3(a) = C_3 \stackrel{!}{=} 0 \tag{21}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{Q(x_3) = 0} \tag{22}$$

$$(20) \text{ in } (7) \quad \Rightarrow \quad M_3(a) = D_3 \stackrel{!}{=} 0 \tag{23}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{M(x_3) = 0} \tag{24}$$

$$(16) \text{ in } (6),(5) \quad \Rightarrow \quad N_2(a) = E_2 = Q_3(0) = 0 \tag{25}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{N(x_2) = 0} \tag{26}$$

$$(12) \text{ in } (5) \quad \Rightarrow \quad N_1(a) = E_2 = N_2(0) = 0 \tag{27}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{N(x_1) = 0} \tag{28}$$

$$(14) \text{ in } (7) \quad \Rightarrow \quad M_1(a) = C_1a + D_1 = 0 \tag{29}$$

$$(15) \text{ in } (11) \quad \Rightarrow \quad M_2(0) = D_2 = 0 \tag{30}$$

$$(13) \text{ in } (10),(6) \quad \Rightarrow \quad Q_1(a) = C_1 = Q_2(0) = C_2 \tag{31}$$

(17) in (10),(5)

$$\Rightarrow \quad Q_2(a) = 2q_0a - 3q_0a + C_2 = -N_3(0) = -E_3 \tag{32}$$

(18) in (11),(7)

$$\Rightarrow \quad M_2(a) = -\frac{1}{2}q_0a^2 + q_0a^2 + C_2a = M_3(0) = 0 \quad (33)$$

$$\Rightarrow \quad C_2 = +\frac{1}{2}q_0a \quad (34)$$

$$\boxed{M(x_2) = \frac{1}{2}\frac{q_0}{a^2}x_2^4 - \frac{q_0}{a}x_2^3 + \frac{1}{2}q_0ax_2} \quad (35)$$

$$\boxed{Q(x_2) = 2\frac{q_0}{a^2}x_2^3 - 3\frac{q_0}{a}x_2^2 + \frac{1}{2}q_0a} \quad (36)$$

$$\boxed{Q(x_1) = \frac{1}{2}q_0a} \quad (37)$$

$$\boxed{M(x_1) = \frac{1}{2}q_0ax_1 - \frac{1}{2}q_0a^2} \quad (38)$$

$$\boxed{N(x_3) = \frac{1}{2}q_0a} \quad (39)$$

Grafische Schnittlastenverläufe: