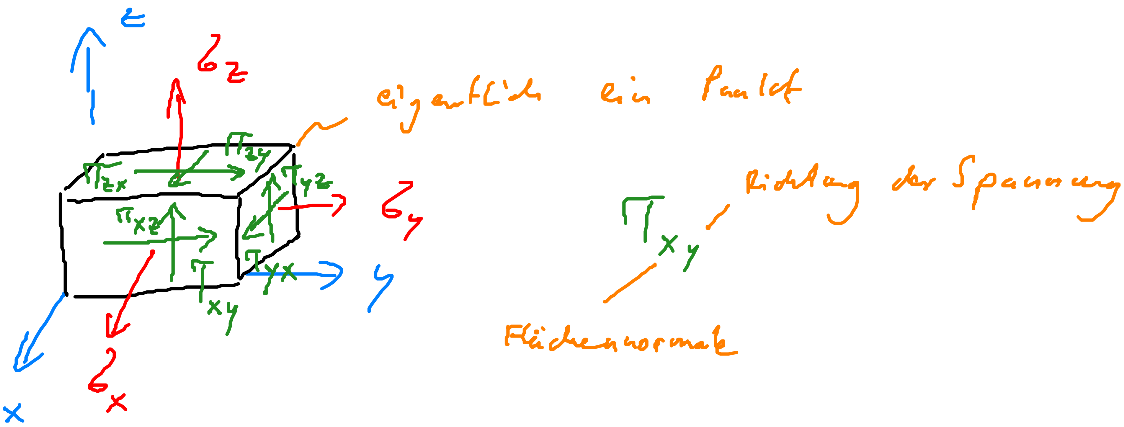
Ue 13: Spannungen

Ue	Tut
139, 138, 140	141, 142, 143
Ma	
136, 137, 145	

1) Spannungstensor



$$\underline{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \tau_{xz} = \tau_{zx} \quad \text{usw.}$$

Tensor 2. Stufe

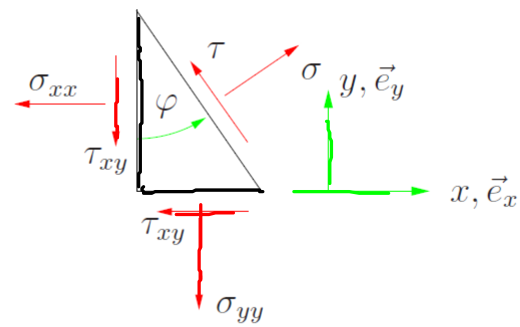
2) ebener Spannungszustand

$\sigma_z = 0, \ \tau_{zy} = 0, \ \tau_{zx} = 0$

$$\underline{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

139. Aufgabe

139. Der dargestellte Scheibenausschnitt steht unter der Wirkung der eingezeichneten Spannungen. Leite in diesem allgemeinen Fall die Gleichungen für den MOHRschen Spannungskreis her!



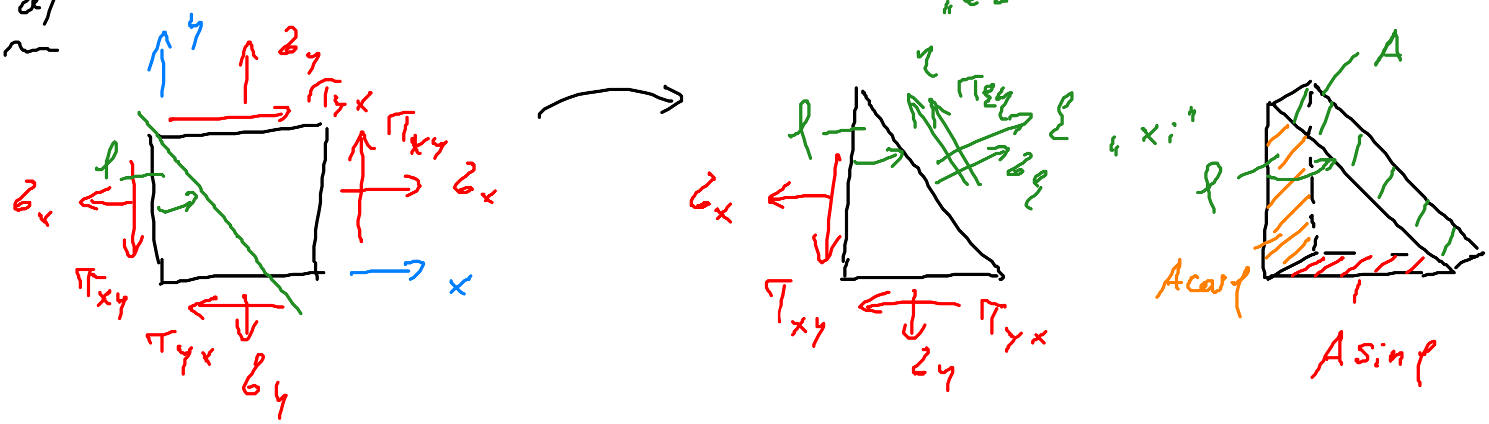
(a) Fordere das Kräftegleichgewicht in x- und y-Richtung und bestimme daraus möglichst einfache Gleichungen für σ und τ! Benutze Additionstheoreme!

(b) Erzeuge durch Quadrieren und Addieren der Gleichungen eine Kreisgleichung!

(c) Identifiziere den Mittelpunkt, den Radius, die maximale Schubspannung und die Hauptnormalspannungen!

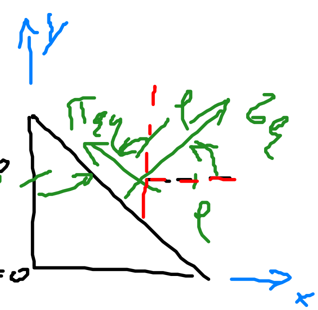
$\Rightarrow$ Wie sehen die Spannungen auf der gekippten Ebene aus?

a)



Scheibe ist im Gleichgewicht: $\sum F_x \overset{!}{=} 0, \quad \sum F_y \overset{!}{=} 0$

$\Rightarrow \quad F = \sigma \cdot A \quad \Rightarrow \quad F_{\sigma_y} = \sigma_y \cdot A \sin\varphi$, usw.



$$\sum F_x = -\sigma_x \cancel{A}\cos\varphi - \tau_{yx}\cancel{A}\sin\varphi + \sigma_\xi \cos\varphi\cancel{A} - \tau_{\xi\eta}\sin\varphi\cancel{A} = 0$$

$$\sum F_y = -\tau_{xy}\cancel{A}\cos\varphi - \sigma_y\cancel{A}\sin\varphi + \sigma_\xi\sin\varphi\cancel{A} + \tau_{\xi\eta}\cos\varphi\cancel{A} = 0$$

..., Additionstheoreme, ... ;

$$\sigma_\xi = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\cos(2\varphi) + \tau_{xy}\sin(2\varphi) \qquad (1)$$

$$\tau_{\xi\eta} = -\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\sin(2\varphi) + \tau_{xy}\cos(2\varphi) \qquad (2)$$

b) Quadriere & Addiere (1) & (2):

$$\left[\sigma_\xi - \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y)\right]^2 + \tau_{\xi\eta}^2 = \left[\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\cos 2\varphi + \tau_{xy}\sin 2\varphi\right]^2$$

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$$+ \left[-\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\sin 2\varphi + \tau_{xy}\cos 2\varphi\right]^2$$

$$\ldots = \left(\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\right)^2\cos^2 2\varphi + \cancel{(\sigma_x - \sigma_y)\cos 2\varphi\,\tau_{xy}\sin 2\varphi} + \tau_{xy}^2\sin^2 2\varphi$$

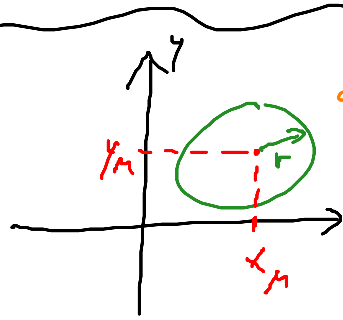
$$+ \left(\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\right)^2\sin^2 2\varphi - \cancel{(\sigma_x - \sigma_y)\sin 2\varphi\,\tau_{xy}\cos 2\varphi} + \tau_{xy}^2\cos^2 2\varphi$$

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$$\underbrace{\left[\sigma_\xi - \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y)\right]^2 + \tau_{\xi\eta}^2 = \left(\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\right)^2 + \tau_{xy}^2}_{\text{Kreisgleichung für Mohrschen Spannungskreis}} \qquad (3)$$

c) Mittelpunkt, Radius des Kreises:

Kreisgleichung:



$$(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = r^2$$

$$\left(\sigma_\xi - \overbrace{\frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y)}^{M}\right)^2 + \tau_{\xi\eta}^2 = \underbrace{\left(\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\right)^2 + \tau_{xy}^2}_{r^2}$$

Mittelpunkt:

aus Vergleich: $x_M \mathrel{\hat=} \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y)$

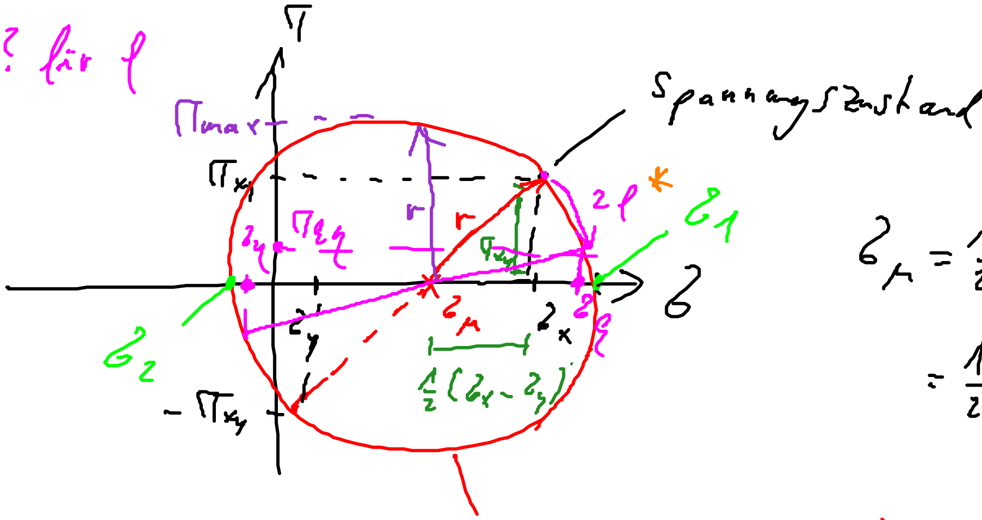
$y_M \mathrel{\hat=} 0$

Radius:

aus Vergleich: $r = \sqrt{\left(\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\right)^2 + \tau_{xy}^2}$

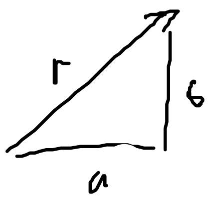
MOHRscher Spannungskreis: $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy} > 0$

$\sigma_\xi = ?$ für φ



$$\sigma_M = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y)$$
$$= \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) + \sigma_y$$

aus Kreisgleichung (3)



* 2φ, da in (11, 12) 2φ steht!

Hauptspannungen: Normalspannungen für $\tau_{\xi\eta} = 0$

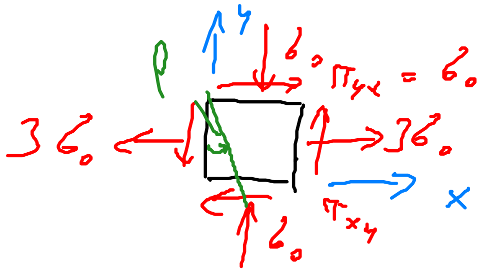
$$\sigma_1 = \sigma_M + r = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \sqrt{\left(\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_2 = \sigma_M - r = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) - \sqrt{\left(\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

Maximale Schubspannung:

$$\tau_{max} = r = \sqrt{\left(\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

Beispiel:

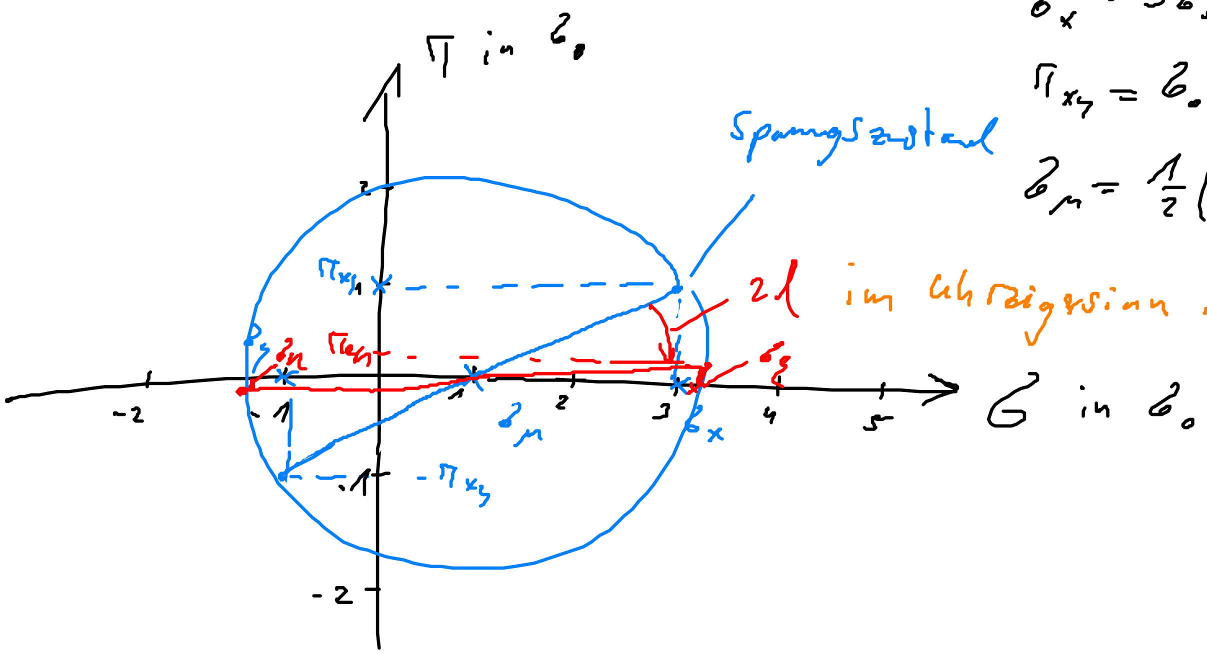


Frage: σ_ξ, $\tau_{\xi\eta}$ für $\varphi = 15°$

$\sigma_x = 3\sigma_0$, $\sigma_y = -\sigma_0$

$\tau_{xy} = \sigma_0$

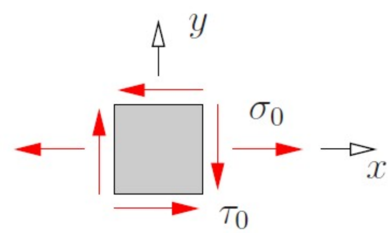
$\sigma_M = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) = \sigma_0$



138. Der untersuchte ebene Spannungszustand besteht aus einer Normalspannung $\sigma_0 = 100$ MPa in Richtung der x-Achse und einer noch unbekannten Schubspannung τ_0.

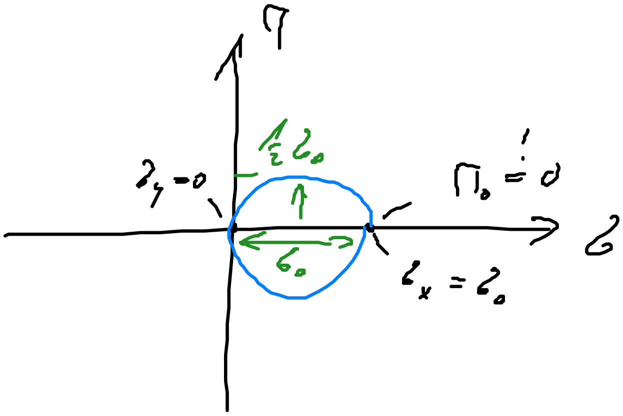
(a) Bestimmen Sie den Betrag der Schubspannung τ_0, so daß die größte Normalspannung 100 MPa beträgt.

(b) Wie groß ist nun die maximale Schubspannung?



a) $\sigma_x = \sigma_0$, $\sigma_y = 0$, $\tau_{xy} = ?$

i) MOHR:



$\sigma_0 = 100$ MPa
$\sigma_{max} = 100$ MPa
$\Big\} \ \sigma_0 = \sigma_{max}$

ii) $\sigma_0 = \sigma_1$ – Hauptspannung.

$$\sigma_{1/2} = \sigma_m \pm r = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_1 = \sigma_0 = \frac{1}{2}(\sigma_0) + \sqrt{\left(\frac{1}{2}\sigma_0\right)^2 + \tau_0^2}$$

$$\cancel{\left(\frac{1}{2}\sigma_0\right)^2} = \cancel{\left(\frac{1}{2}\sigma_0\right)^2} + \tau_0^2 \Rightarrow \tau_0 = 0$$

b) τ_{max}:

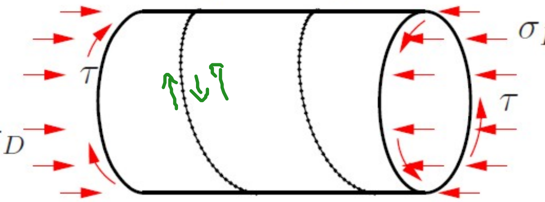
i) MOHR: $\tau_{max} = \frac{1}{2}\sigma_0$

ii) $$\tau_{max} = r = \sqrt{\left(\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}(\sigma_0)\right)^2 + 0^2} = \frac{1}{2}\sigma_0$$

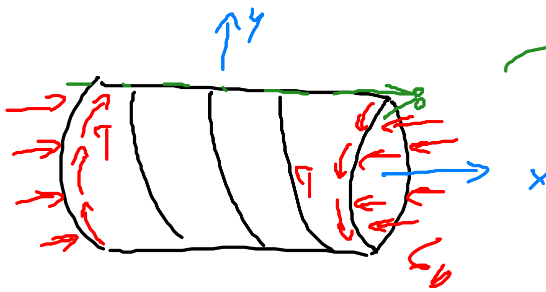
140. Ein dünnwandiges Rohr mit dem Außendurchmesser d, das aus einem wendelförmig gewickelten und verschweißten Stahlband der Breite b gefertigt ist, dient zum Übertragen eines Torsionsmomentes und einer axialen Druckkraft. In einem Schnitt senkrecht zur Rohrachse treten dabei die Druckspannung σ_D und die Schubspannung τ auf.

(a) Bei welchem Verhältnis σ_D/τ wird die Schweißnaht nicht auf Schub beansprucht?

(b) Wie groß sind im Fall (a) die Normalspannungen in der Schweißnaht?



Geg.: $d = 240$ mm, $b = 360$ mm, $\sigma_D = 4000$ N/mm^2

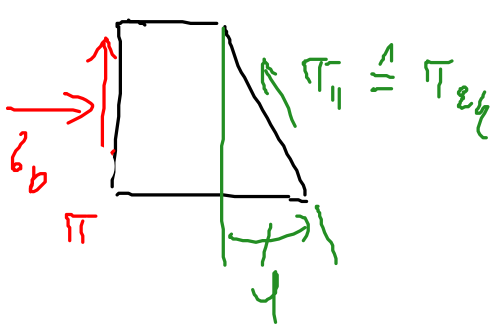


a) $\frac{\sigma_D}{\tau}$ damit $\tau_\varphi \stackrel{!}{=} 0$

$\frac{b}{u} = \frac{b}{\pi d} = \sin(\varphi)$

* entspricht dem φ aus Herleitung (UE 24, 139)

$$\frac{b}{\pi d} = \sin(\varphi) \quad (1) \quad \Rightarrow \quad \varphi = \arcsin\left(\frac{b}{\pi d}\right) = 28{,}5°$$



$\tau_{\xi\eta} \stackrel{!}{=} 0$ entspricht der Schubspannung in der Schweißnaht!

$$\tau_{\xi\eta} = -\frac{1}{2}(\sigma_x - \underbrace{\cancel{\sigma_y}}_{=0})\sin(2\varphi) + \tau_{xy}\cos(2\varphi) = 0$$

$$0 = -\frac{1}{2}\left(-\sigma_D\right)\sin(2\varphi) + (-\tau)\cos(2\varphi)$$

$$\frac{\sigma_D}{\tau} = \frac{2}{\tan(2\varphi)} = 1{,}3$$