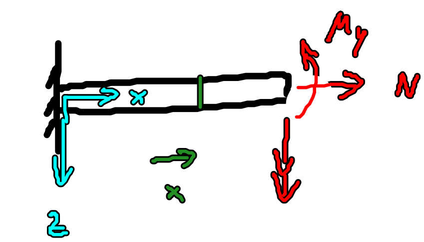
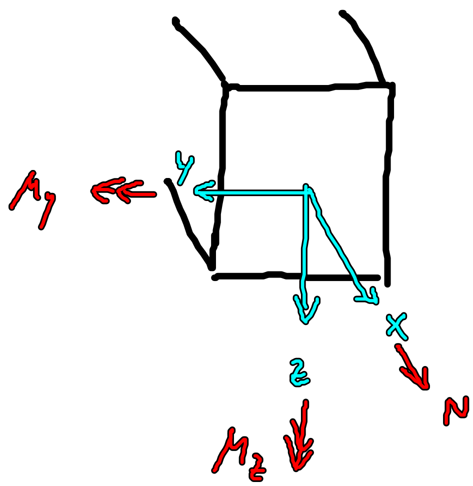
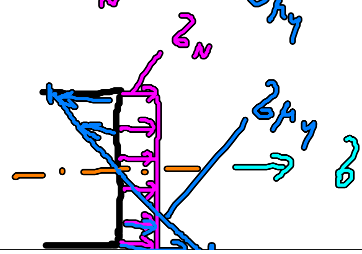
12. Übung: Spannung bei Balkenbiegung

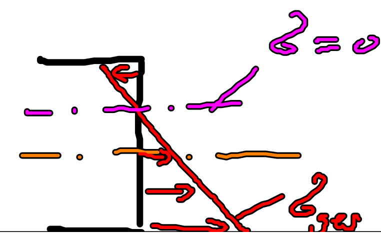




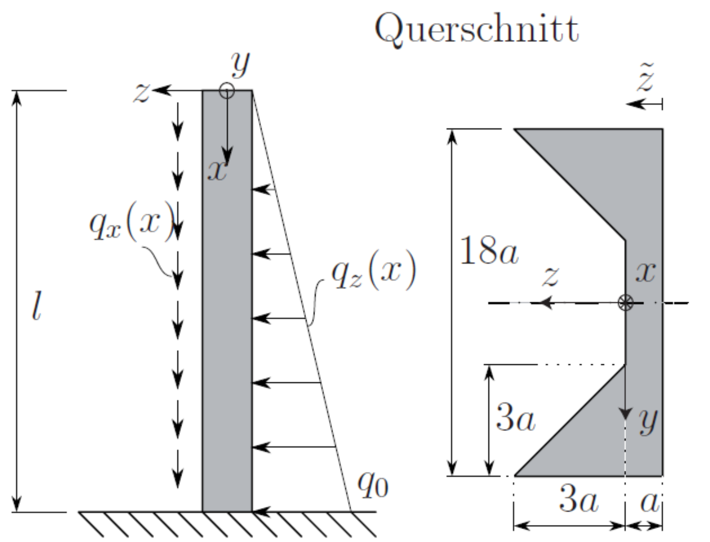
$$\underbrace{\sigma}_{\sigma_g} = \underbrace{\frac{N}{A}}_{\sigma_N} + \underbrace{\frac{M_y}{I_y} z}_{\sigma_{M_y}} - \frac{M_z}{I_z} \cdot y$$



=>



1. Eine Lawinenverbauung habe den gezeigten Querschnitt und die Länge $l = 100a$. Neben der Geröllast $q_z(x)$, die als eine linear bis auf q_0 anwachsende Streckenlast in die z-Richtung modelliert wird, wirkt in die Längsrichtung das konstante längenbezogene Eigengewicht $q_x(x) = \frac{27}{40}q_0$.



   (a) Bestimmen sie die Lage des Flächenschwerpunkts des Querschnitts bzgl. der eingezeichneten Koordinate $\tilde{z}$.

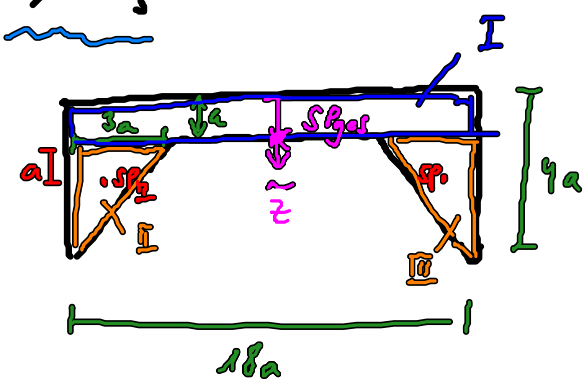
   (b) Wie groß ist das Flächenträgheitsmoment I_{yy} des Gesamtquerschnitts bzgl. der y-Achse welche durch den Flächenschwerpunkt verläuft?

   (c) Ermitteln Sie den Verlauf der Normalkraft $F_n(x)$, der Querkraft $F_q(x)$ und des Biegemoments $M_b(x)$.

(d) Skizzieren Sie den Verlauf der Biegenormalspannung in der Einspannung ($x = l$). Bestimmen Sie dabei auch die (betragsmäßigen) Maximalwerte der Druck- und Zugspannung $\sigma_{\max,\text{Druck}}$ bzw. $\sigma_{\max,\text{Zug}}$. Vereinfachend sei angenommen, dass das Flächenträgheitsmoment bzgl. der y-Achse den Wert $I_{yy} \doteq 20a^4$ habe.

Geg.: a, $l = 100a$, q_0, $q_x(x) = \frac{27}{40} q_0$

a) $\tilde{z}_s$

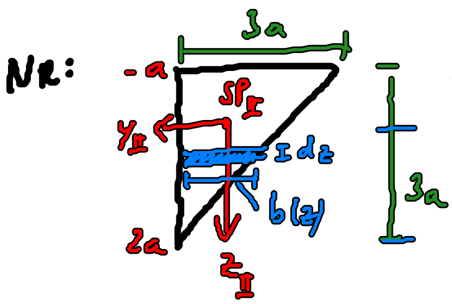


$$\tilde{z}_s = \frac{\sum \tilde{z}_i A_i}{\sum A_i} = \frac{27a^3}{27a^2} = a$$

b) $I_{y_{ges}}$: $I_{y_{ges}} = \sum I_{\tilde{y}_i} + \underbrace{\sum z_{s_i}^2 A_i}_{\text{Steiner-Anteil}}$

i	A_i	$\tilde{z}_i$	$\tilde{z}_i A_i$	$z_{s_i} = \lvert \tilde{z}_i - \tilde{z}_s \rvert$	$z_{s_i}^2 A_i$	$I_{\tilde{y}_i}$
I	$18a^2$	$\frac{a}{2}$	$9a^3$	$\frac{a}{2}$	$\frac{18}{4}a^4$	$\frac{1}{12}bh^3 = \frac{1}{12} 18a\, a^3 = \frac{18}{12}a^4$
II	$\frac{9}{2}a^2$	$2a$	$9a^3$	a	$\frac{9}{2}a^4$	$\frac{27}{12}a^4$
III	$\frac{9}{2}a^2$	$2a$	$9a^3$	a	$\frac{9}{2}a^4$	$\frac{27}{12}a^4$
$\sum$	$27a^2$	–	$27a^3$	–	$\frac{27}{2}a^4$	$\frac{72}{12}a^4$

NR:



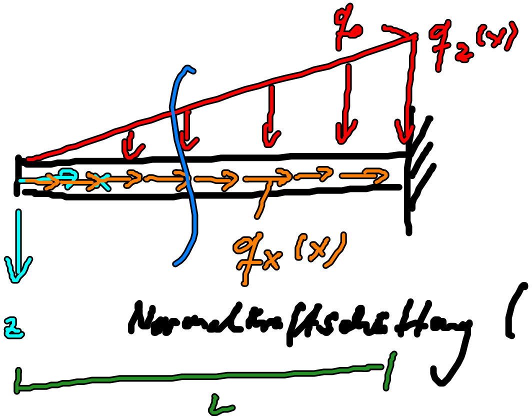
$$I_y = \int z^2 \, dA = \int_{-a}^{2a} z^2 \overbrace{b(z)\, dz}^{dA} = \int_{-a}^{2a} z^2 (2a - z)\, dz$$

$b(z) = (2a - z)$

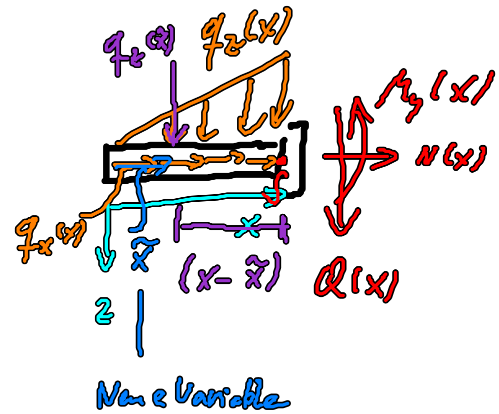
$$= \left[\frac{2}{3} a z^3 - \frac{1}{4} z^4 \right]_{-a}^{2a} = \frac{27}{12} a^4$$

$$\Longrightarrow I_{y_{ges}} = \frac{72}{12}a^4 + \frac{27}{2}a^4 = \left(\frac{12}{2} + \frac{27}{2} \right) a^4 = \frac{39}{2} a^4$$

c) $N(x)$, $Q(x)$, $M_y(x)$: mit Globalschnitt



Normalkraftbelastung $\left([q_x] = \frac{N}{m}\right)$



GGB: $\sum F_x \overset{!}{=} 0 \quad (1)$

$$\sum F_z \overset{!}{=} 0, \quad 0 = Q(x) + \int_0^x q_z(\tilde{x})\, d\tilde{x} \Rightarrow Q(x) = -\int_0^x \frac{q_0}{L}\tilde{x}\, d\tilde{x}$$

$\sum M^{(0)} \overset{!}{=} 0 \quad (2)$

$$Q(x) = \left[-\frac{1}{2L}q_0\tilde{x}^2\right]_0^x = -\frac{1}{2L}q_0 x^2$$

$$(1): \quad 0 = N(x) + \int_0^x q_x(\tilde{x})\, d\tilde{x} \Rightarrow N(x) = -\int_0^x \frac{27}{40}q_0\, d\tilde{x} = -\frac{27}{40}q_0 x$$

$$(2): \quad 0 = M_y(x) + \int_0^x q_z(\tilde{x})(x-\tilde{x})\, d\tilde{x}$$

$$\Rightarrow M_y(x) = -\int_0^x \frac{q_0}{L}\tilde{x}(x-\tilde{x})\, d\tilde{x} = -\left[\frac{q_0}{L}\left(\frac{1}{2}\tilde{x}^2 x - \frac{1}{3}\tilde{x}^3\right)\right]_0^x$$

$$M_y(x) = -\frac{q_0}{L}\left(\frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{3}x^3\right) = -\frac{q_0}{6L}x^3$$

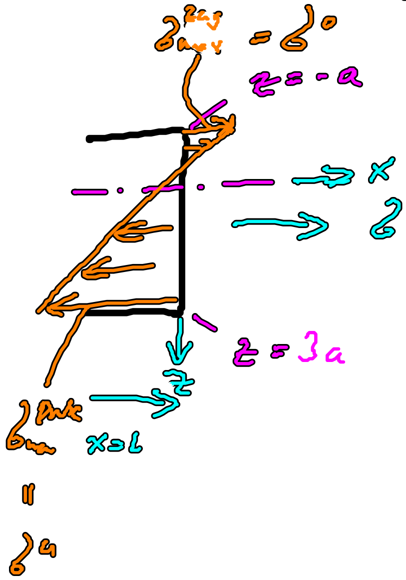
d) $\sigma_{max}(x=L, z)$

i) $$\sigma = \frac{N(x)}{A} + \frac{M_y(x)}{I_y}\cdot z - \underbrace{\cancel{\frac{M_z(x)}{I_z}}}_{=0}\cdot y$$

$$\sigma(x=L, z) = -\frac{27}{40}\frac{q_0 L}{A} - \frac{q_0}{6L}L^3\frac{z}{I_y}$$

$A = 27a^2, \quad I_y = \frac{33}{2}a^4$ $\qquad L = 100a$

$$\sigma(l,z) = -\frac{2t}{40}\frac{q_0 l}{2t a^2} - \frac{q_0 l^2}{6}\frac{2}{39 a^4}\cdot z \overset{!}{=} -\frac{q_0}{12a^2}\left(1000 z + 30a\right)$$



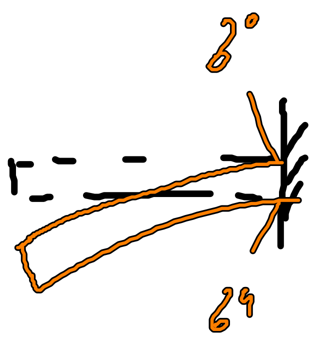
Maximale Spannungen:

$z = -a \Rightarrow \sigma^o = -\frac{q_0}{12a^2}\left(-1000a + 30a\right)$

„Spannung oben" $\sigma^o = \frac{970}{12}\frac{q_0}{a} = \frac{485}{6}\frac{q_0}{a}$

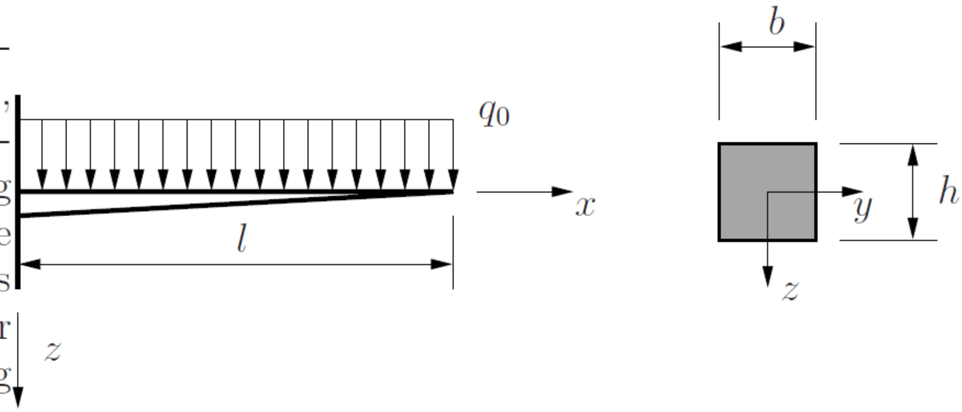
$z = 3a \Rightarrow \sigma^u = -\frac{q_0}{12a^2}\left(3000a + 30a\right)$

„Spannung unten" $\sigma^u = \frac{-3030}{12}\frac{q_0}{a} = \frac{-505}{2}\frac{q_0}{a}$



130. Das Modell eines Tragflügelholms besteht aus einem einseitig fest eingespannten Balken der Länge l. Der Tragflügelholm wird durch eine konstante Streckenlast q_0, die aus den Luftkräften und dem Eigengewicht resultiert, belastet. Der Balken hat eine rechteckige Querschnittsfläche $A = bh$. Die Balkenhöhe h ist eine Funktion der Längskoordinate x. Das Material sei isotrop.

(a) Bestimmen Sie den Verlauf der Balkenhöhe h, so daß der maximale Betrag der Längsspannung σ_{max} über die gesamte Länge des Balkens konstant und gleich der zulässigen Spannung σ_{zul} ist.



(b) Berechnen Sie für diesen Fall die Biegelinie $w(x)$.

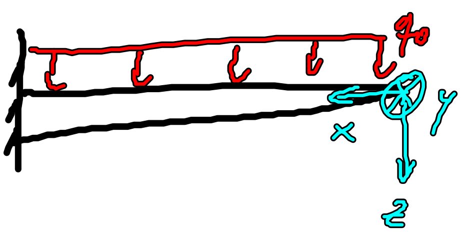
Geg.: q_0, l, E, b, σ_{zul}

a) $h(x)$ damit $\sigma_{max} = \sigma_{zul}$

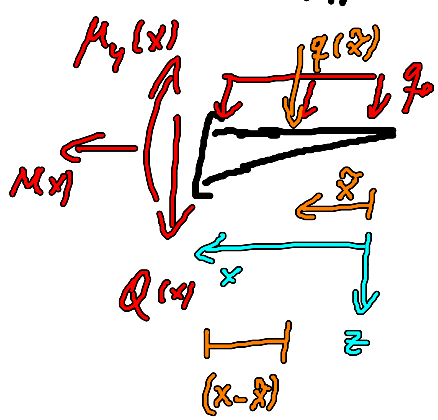
$$\sigma = \cancel{\frac{N}{A}}_{=0} + \frac{M_y}{I_y} z - \cancel{\frac{M_z}{I_z}}_{=0} y = \frac{M_y}{I_y} z$$

$$\sigma_{max} = \frac{|M_y(x)_{max}|}{I_y} \cdot |z_{max}| \stackrel{!}{=} \sigma_{zul}$$

i) $M_y(x)$:



Globalschnitt:



$$M_y(x) = -\int_0^x q_0 (x - \tilde{x})\, d\tilde{x}$$

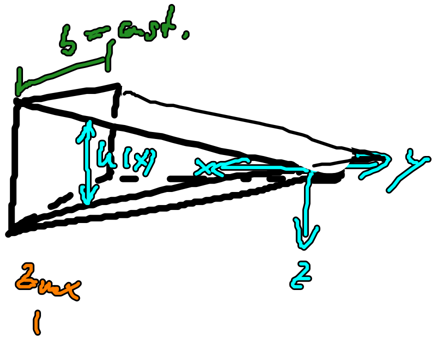
$$M_y(x) = -\left[q_0 \left(x\tilde{x} - \frac{1}{2}\tilde{x}^2\right)\right]_0^x$$

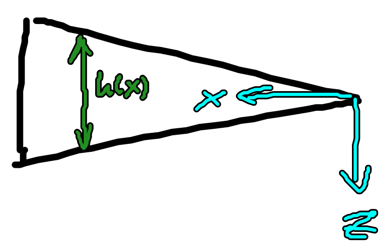
$$M_y(x) = -\frac{1}{2} q_0 x^2$$

ii)

$$I_y = \frac{1}{12} b h^3$$

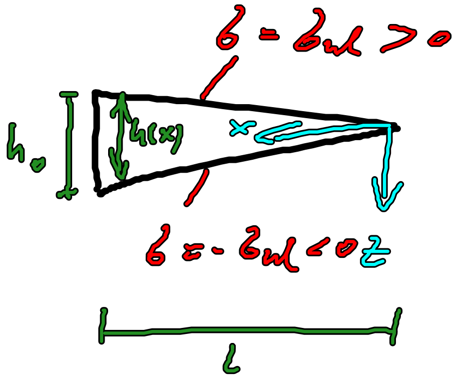
$$I_y = \frac{1}{12} b h^3(x)$$





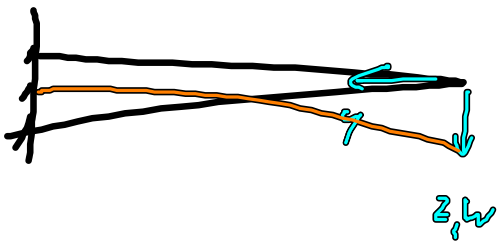
$$\Longrightarrow \quad \sigma_{zul} = \frac{+\frac{1}{2} q_0 x^2}{\frac{1}{12} b h^3(x)} \cdot \frac{h(x)}{2} = \frac{3\,\cancel{12}\, q_0 x^2}{\cancel{4}\, b\, h^2}$$

$$h^2(x) = \frac{3 q_0 x^2}{b\, \sigma_{zul}} \Longrightarrow h(x) = \sqrt{\frac{3 q_0}{b\, \sigma_{zul}}} \cdot x$$



$$\Longrightarrow h(x) = \frac{h_0}{l} x$$

b) Bestimme Sie $w(x)$



$$\boxed{(EI w'')'' = q(x)}$$ $M_y(x)$ ist schon bekannt!

$$EI w'' = -M_y(x)$$

$$EI(x) w''(x) = -M_y(x) \Rightarrow EI(x) w''(x) = \frac{1}{2} q_0 x^2$$

$$I(x) = \frac{1}{12} b (h(x))^3 = \frac{1}{12} b \left(\frac{h_0}{L} x\right)^3$$

$$E \frac{1}{12} b \left(\frac{h_0}{L}\right)^3 x^3 w''(x) = \frac{1}{2} q_0 x^2$$

$$w''(x) = \frac{1}{2} q_0 \frac{12}{Eb} \left(\frac{L}{h_0}\right)^3 \frac{x^2}{x^3} = \underbrace{\frac{6 q_0}{Eb} \left(\frac{L^2}{h_0^3}\right)}_{\hat{A}} \frac{L}{x}$$

$$w'' = \hat{A} \frac{L}{x}$$

$$w' = \int \hat{A} \frac{L}{x} \, dx = \hat{A} \int \frac{1}{\left(\frac{x}{L}\right)} \, dx = \hat{A} \int \frac{1}{\hat{x}} L \, d\hat{x}$$

$$\hat{x} = \frac{x}{L} \Rightarrow \frac{d\hat{x}}{dx} = \frac{1}{L} \Rightarrow dx = L \, d\hat{x}$$

$$w' = \hat{A} \ln(\hat{x}) \cdot L + C_1$$

$$w = \int \hat{A} \ln(\hat{x}) \cdot L \, dx + C_1 x + C_2$$

$$= \int \tilde{A} L^2 \ln(\hat{x}) \, d\hat{x} + C_1 x + C_2$$

$$w = \tilde{A} L^2 \hat{x} \left(\ln(\hat{x}) - 1 \right) + \underbrace{C_1 x + C_2}_{\text{aus RBen!}}$$

Rücksubstitution:

$$\hat{x} = \frac{x}{L} \implies w(x) = \tilde{A} L^2 \frac{x}{L} \left(\ln\left(\frac{x}{L}\right) - 1 \right) + C_1 x + C_2$$

RBen:

$$w(L) = 0 = \tilde{A} L^2 \left(\ln(1) - 1 \right) + \underbrace{C_1}_{=0} L + C_2 \qquad (1)$$

$$w'(L) = 0 = \tilde{A} \ln\Big(\underbrace{\tfrac{L}{L}}_{=0}\Big) + C_1 \implies C_1 = 0$$

$(\ln 1 = 0)$

$$(1): \quad 0 = -\tilde{A} L^2 + C_2 \rightarrow C_2 = \tilde{A} L^2$$

$$\implies w(x) = \tilde{A} L \left(x \left(\ln\left(\frac{x}{L}\right) - 1 \right) + L \right)$$

$$w(x) = \tilde{A} L^2 \left(\frac{x}{L} \left(\ln\left(\frac{x}{L}\right) - 1 \right) + 1 \right)$$