11. Übung: Biegelinie

Ue	Tut	Me
2, 112	117, 113	111, 119, 118

1.) DGL der Biegelinie

$$\left(EI\, w''(x)\right)'' = q(x)$$

$q(x)$: q_0, $q_0 \frac{x}{L}$, 0, ...

1.) Integrieren
2.) RBen / ÜBen
3.) Auflösen

$\Longrightarrow w(x)$ und $M(x) = -EI\, w''(x)$

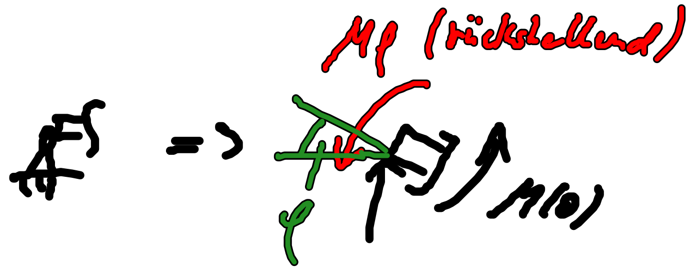
$Q(x) = M'(x) = -EI\, w'''(x)$

} Lösen stat. unbestimmter Systeme

2.) RBen

	$w(x)$	$w'(x)$	$M(x) = -EIw''$	$Q(x) = -EIw'''$
	0	–	0	–
	–	–	0	0
	0	0	–	–
	–	0	–	0
c 	0	–	$-c \cdot w'(0)$	–

Drehfeder:



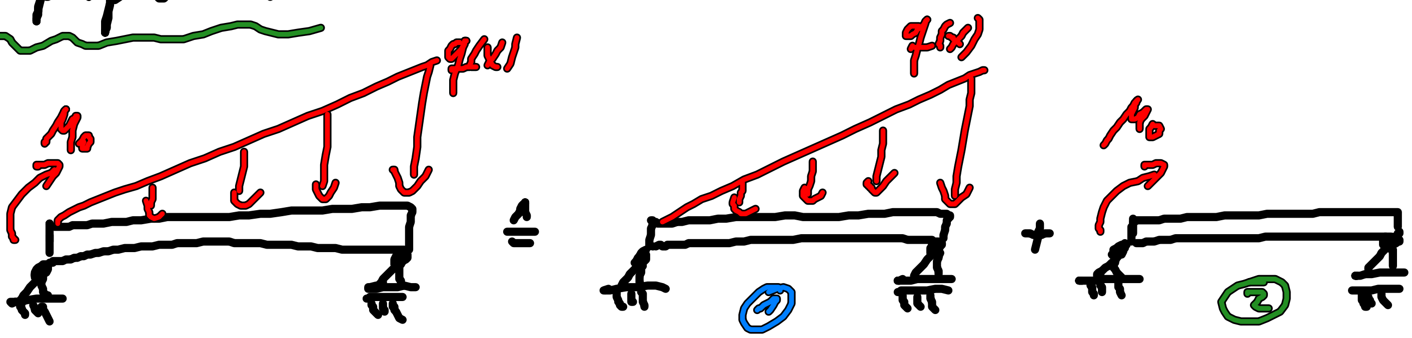
$$M(0) = -M_\varphi = -c_\varphi \cdot \varphi$$

Dreh-Steifigkeit

mit: $\varphi = w' \implies M(0) = -c_\varphi \cdot w'(0)$

3.) Superposition

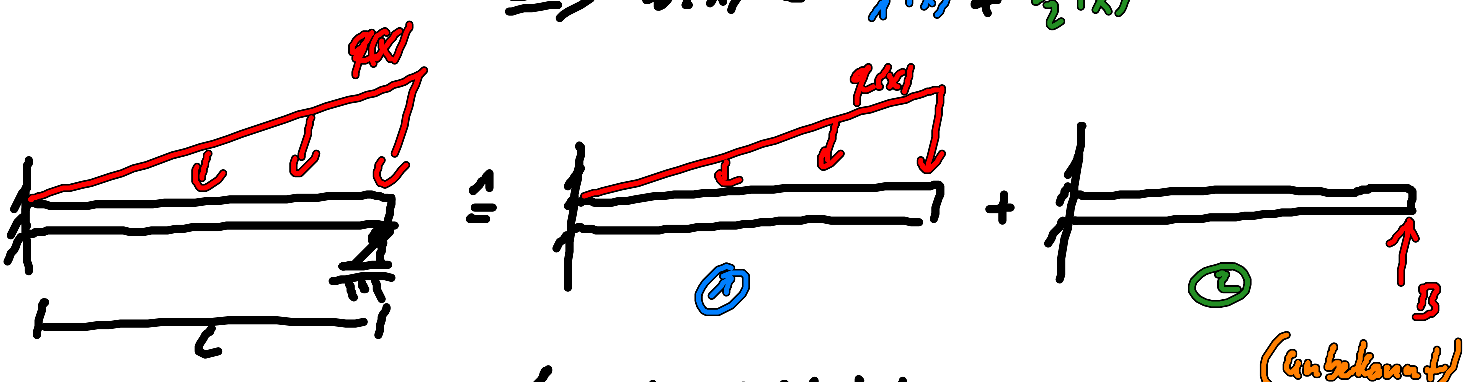
i)



$w_1(x)$ $w_2(x)$

$$\implies w(x) = w_1(x) + w_2(x)$$

ii)



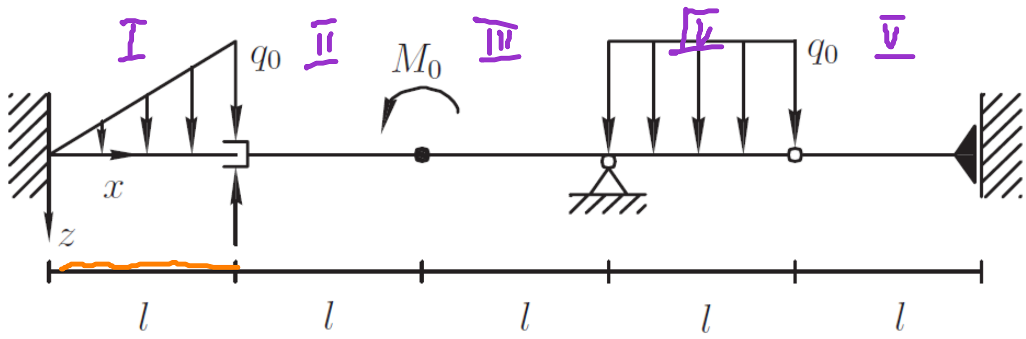
& Verträglichkeitsbedingung:

$$w(l) \overset{!}{=} 0$$

$$0 = w_1(l) + w_2(l) \implies B \text{ berechnen}$$

Zusatzaufgabe

1. Gegeben ist der folgende Balken ($EI = \text{const.}$):



(a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Biegeliniendifferentialgleichung für den Abschnitt von $x = 0$ bis $x = l$.

(b) Geben Sie für das skizzierte System sämtliche Rand- und Übergangsbedingungen zur Bestimmung der Biegelinie an.

Geg.: EI, l, q_0, M_0, F

a) $(EIw'')'' = q(x)$, hier: $EI = \text{const.}$, $q(x) = \frac{q_0}{l}x$

$$\Rightarrow \quad EIw'''' = \frac{q_0}{l}x$$

$$\int EIw'''' \, dx = \int \frac{q_0}{l} x \, dx$$

$$EIw'' = \frac{1}{2}\frac{q_0}{l}x^2 + C_1$$

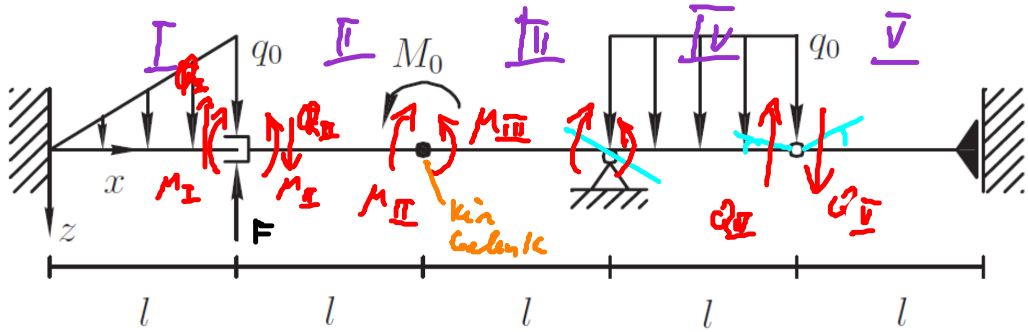
$$EIw'' = \frac{1}{6}\frac{q_0}{l}x^3 + C_1 x + C_2$$

$$EIw' = \frac{1}{24}\frac{q_0}{l}x^4 + \frac{1}{2}C_1 x^2 + C_2 x + C_3$$

$$\underbrace{EIw = \frac{1}{120}\frac{q_0}{l}x^5 + \frac{1}{6}C_1 x^3 + \frac{1}{2}C_2 x^2 + C_3 x + C_4}_{\text{allg. Lösung für Bereich im } 0 < x < l}$$

b) $\Rightarrow$ 5 Bereiche $\Rightarrow$ 20 Konstanten

1. Gegeben ist der folgende Balken (EI = const.):

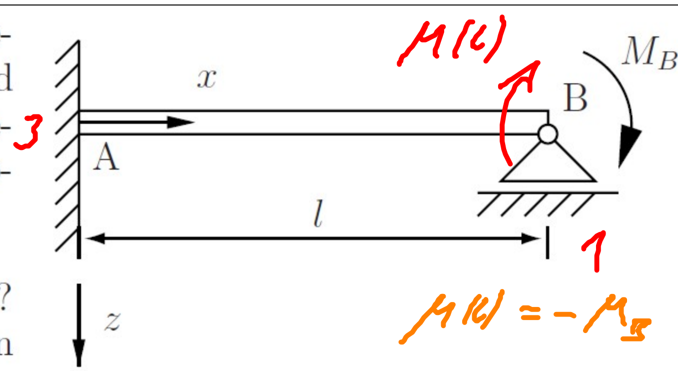


x	w(x)	w'(x)	M(x)	Q(x)	
0	0	0	–	–	2
l	$w_I = w_{II}$	$w_I' = w_{II}'$	$M_I = M_{II}$	$Q_{II} = Q_I + F$	4
2l	$w_{II} = w_{III}$	$w_{II}' = w_{III}'$	$M_{II} = M_{III} + M_0$	$Q_{II} = Q_{III}$	4
3l	$w_{III} = 0$ $w_{IV} = 0$	$w_{III}' = w_{IV}'$	$M_{III} = M_{IV}$	—	4
4l	$w_{IV} = w_V$	—	$M_{IV} = 0$ $M_V = 0$	$Q_{IV} = Q_V$	4
5l	–	0	–	0	2

Σ 20 ✓

112. Aufgabe

112. Der abgebildete schlanke Balken (Länge l, Biegesteifigkeit EI) ist links fest eingespannt und rechts über ein Loslager an die Umgebung gekoppelt. Der Balken wird bei B durch ein Moment M_B belastet.



(a) Ist der Balken statisch bestimmt gelagert? Können die Schnittgrößen allein aus den Gleichgewichtsbedingungen gewonnen werden?

(b) Bestimmen Sie die Auflagerreaktionen und den Verlauf des Biegemomentes mit Hilfe der Biegeliniendifferentialgleichung.

(c) Nutzen Sie das Superpositionsprinzip, um den Aufgabenteil (b) zu lösen.

(d) Wie groß ist das maximale Biegemoment im Balken?

Geg.: M_B, l, EI

a) notw. Bed.: $f = r + v \Rightarrow 3 \neq 4 + 0$

Nein! und Nein!

b) $(EIw'')'' = q(x)$

1.) Integrieren:

$$EIw'''' = 0$$
$$EIw''' = C_1$$
$$EIw'' = C_1 x + C_2$$
$$EIw' = \frac{1}{2} C_1 x^2 + C_2 x + \underbrace{\cancel{C_3}}_{=0}$$
$$EIw = \frac{1}{6} C_1 x^3 + \frac{1}{2} C_2 x^2 + \underbrace{\cancel{C_3}}_{=0} x + \underbrace{\cancel{C_4}}_{=0}$$

2.) RBen

1) $w(0) = 0 \Rightarrow 0 = C_4$

2) $w'(0) = 0 \Rightarrow 0 = C_3$

3) $w(l) = 0 \Rightarrow 0 = \frac{1}{6} C_1 l^3 + \frac{1}{2} C_2 l^2 \quad (1)$

4) $M(l) = -M_B \Rightarrow + EIw''(l) = + M_B$

$-EIw''(l)$

$$M_B = C_1 l + C_2 \quad (2) \Rightarrow C_2 = M_B - C_1 l$$

in (1):
$$0 = \frac{1}{6} C_1 l^3 + \frac{1}{2}(M_B - C_1 l) l^2 = C_1 l^3 \underbrace{\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2}\right)}_{= -\frac{1}{3}} + \frac{1}{2} M_B l^2$$

$$0 = -\frac{1}{3} C_1 l^3 + \frac{1}{2} M_B l^2 \Rightarrow C_1 = \frac{3 M_B}{2 l}$$

$$C_2 = M_B - \frac{3}{2} M_B$$

$$C_2 = -\frac{1}{2} M_B$$

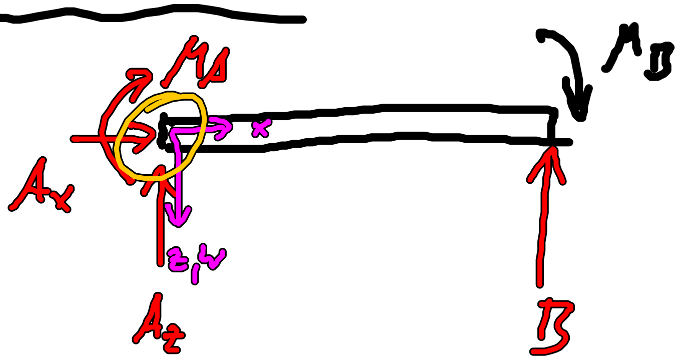
Ergebnis:

$$w(x)=\frac{1}{EI}\left(\frac{1}{\cancel{6}}\,\frac{\cancel{3}}{4}\,\frac{M_B}{l}\,x^3+\frac{1}{\cancel{2}}\left(-\frac{1}{4}M_B\right)x^2\right)$$

$$w(x)=\frac{M_B l^2}{4EI}\left(\left(\frac{x}{l}\right)^3-\left(\frac{x}{l}\right)^2\right)$$

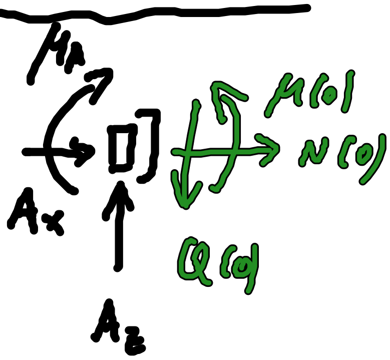
3.) Lagerreaktionen

FS:



mit:
$$M(x)=-EI\,w''(x)=-(C_1x+C_2)=-\frac{3}{2}\frac{M_B}{l}x+\frac{1}{2}M_B$$
$$Q(x)=-EI\,w'''(x)=-C_1=-\frac{3}{2}\frac{M_B}{l}$$

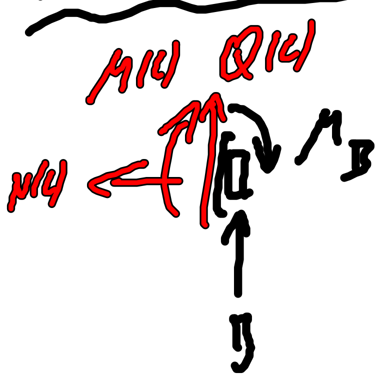
FS: $x=0$:



$$\sum F_z \overset{!}{=} 0 \Rightarrow A_z = Q(0) = -\frac{3}{2}\frac{M_B}{l}$$

$$\sum M^{(A)} \overset{!}{=} 0 \Rightarrow M_A = M(0) = \frac{1}{2}M_B$$

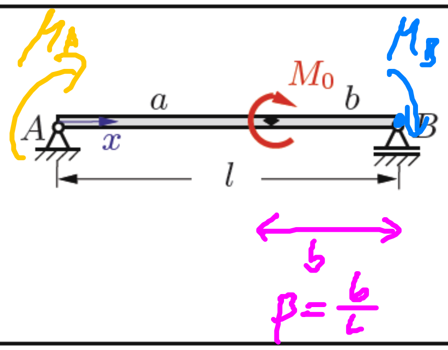
FS: $x=l$:

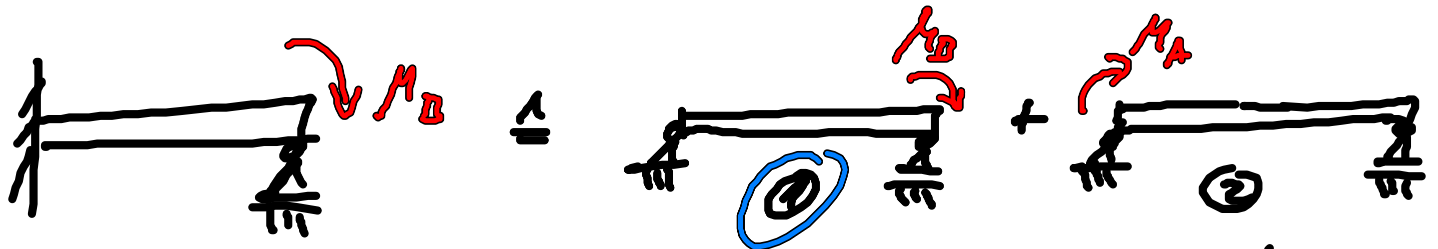


$$\sum F_z \overset{!}{=} 0 \Rightarrow B = -Q(l) = \frac{3}{2}\frac{M_B}{l}$$

c) Nochmal mit Superposition

aus Buch:

		$EI\,w_A'$	$EI\,w_B'$
5		$\frac{M_0\,l}{6}(3\beta^2 - 1)$ $-\frac{M_0\,l}{6}$ für $b = 0$	$\frac{M_0\,l}{6}(3\alpha^2 - 1)$ $\frac{M_0\,l}{3}$ für $b = 0$



Verträglichkeitsbedingung: $w'(0) = 0$ (1)

$w'(0) = w_A'$ (in Tabelle)

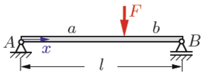
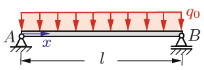
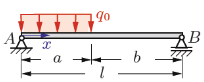
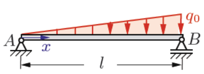
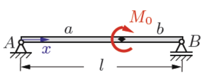
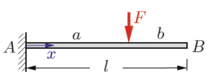
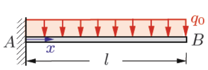
$$w(x) = w_1(x) + w_2(x)$$

$$w'(x) = w_1'(x) + w_2'(x)$$

$$\overset{(1)}{\Rightarrow} 0 = w_1'(0) + w_2'(0) = -\frac{M_B L}{6EI} + \frac{M_A L}{6}(3-1)$$

$$0 = -\frac{1}{6} M_B l + \frac{1}{3} M_A l \Rightarrow M_A = \frac{3}{6} M_B$$

Tabelle 4.3. Biegelinien (siehe auch Erklärungen S. 140/141)

Nr.	Lastfall	$EI\,w'_A$	$EI\,w'_B$
1		$\frac{F\,l^2}{6}(\beta-\beta^3)$	$-\frac{F\,l^2}{6}(\alpha-\alpha^3)$
2		$\frac{q_0\,l^3}{24}$	$-\frac{q_0\,l^3}{24}$
3		$\frac{q_0\,l^3}{24}(1-\beta^2)^2$	$\frac{q_0\,l^3}{24}[\,4(1-\beta^3)$ $-6(1-\beta^2)$ $+(1-\beta^2)^2]$
4		$\frac{7\,q_0\,l^3}{360}$	$-\frac{q_0\,l^3}{45}$
5		$\frac{M_0\,l}{6}(3\beta^2-1)$ $-\frac{M_0\,l}{6}$ für $b=0$	$\frac{M_0\,l}{6}(3\alpha^2-1)$ $\frac{M_0\,l}{3}$ für $b=0$
6		0	$\frac{F\,a^2}{2}$
7		0	$\frac{q_0\,l^3}{6}$

$\beta = \frac{b}{l}$