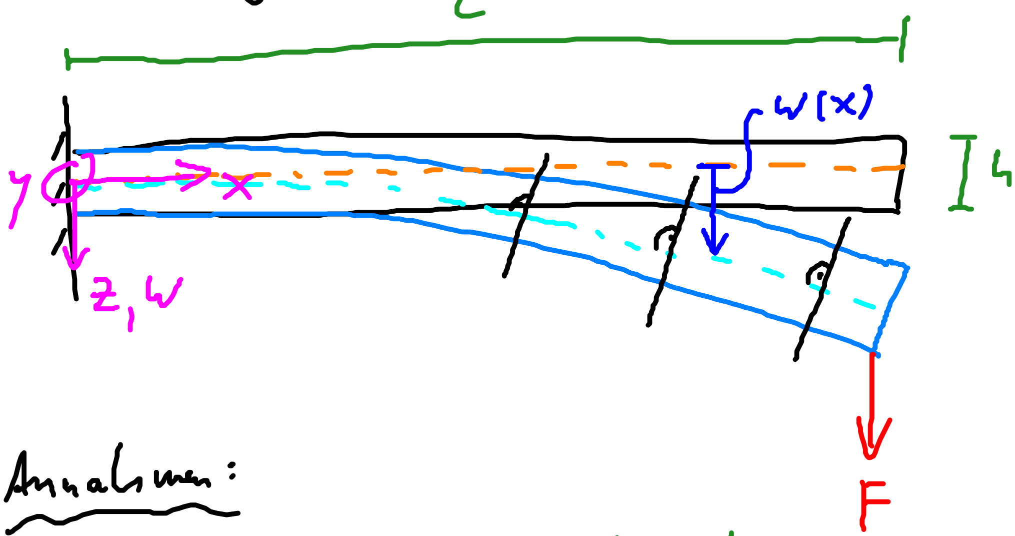
10. Übung: Balkenbiegung



$w(x) \mathrel{\hat{=}}$ Durchbiegung

Annahmen:

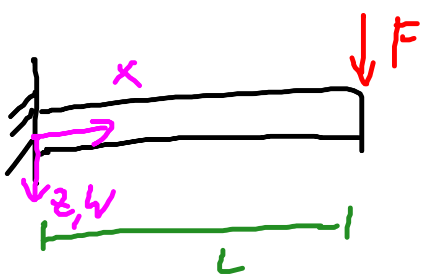
- Schlanker Balken: $L \gg h$
- Bernoulli-Hypothese: Querschnitte stehen senkrecht zur neutralen Faser ($\Rightarrow$ Schwerpunkt des Querschnitts) und sie bleiben eben

Es gilt:

$$\boxed{-E I_y w''(x) = M_y(x)} \qquad (1)$$

E-Modul, Flächenträgheitsmoment, Biegemoment

Bsp.:



$$\Rightarrow M(x) = -F(L-x)$$

in (1):

$$\cancel{-}\, E I_y w''(x) = \cancel{-}\, F(L-x)$$

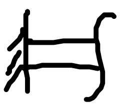
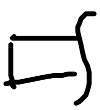
$$E I_y w'(x) = \int F(L-x)\,dx + C_1$$

$$= F\left(Lx - \tfrac{1}{2}x^2\right) + C_1$$

$$EI_y\, w(x) = \int \left(F\left(lx - \frac{1}{2}x^2\right) + c_1\right) dx$$

$$EI_y\, w(x) = F\left(\frac{1}{2}lx^2 - \frac{1}{6}x^3\right) + c_1 x + c_2$$

c_1, c_2 aus RBen!

	w	w'
	0	–
	0	0
	–	0
	–	–

hier: $w(x=0) = 0$

$w'(x=0) = 0$

$\Longrightarrow c_1, c_2 = 0$

damit:

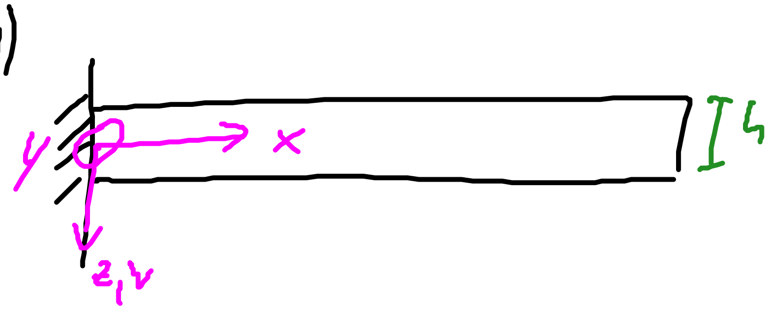
$$w = \frac{1}{EI} F\left(\frac{1}{2}lx^2 - \frac{1}{6}x^3\right)$$

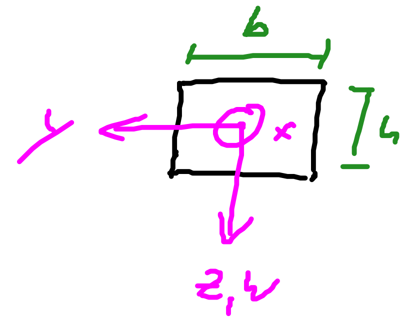
Flächenträgheitsmoment

$I_y = \int z^2\, dA$ – Biegung um y

$I_z = \int y^2\, dA$ – Biegung um z

Bsp.: 1)

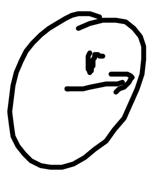




$$\boxed{I_y = \frac{1}{12} b h^3}$$

$$I_z = \frac{1}{12} h b^3$$

2)

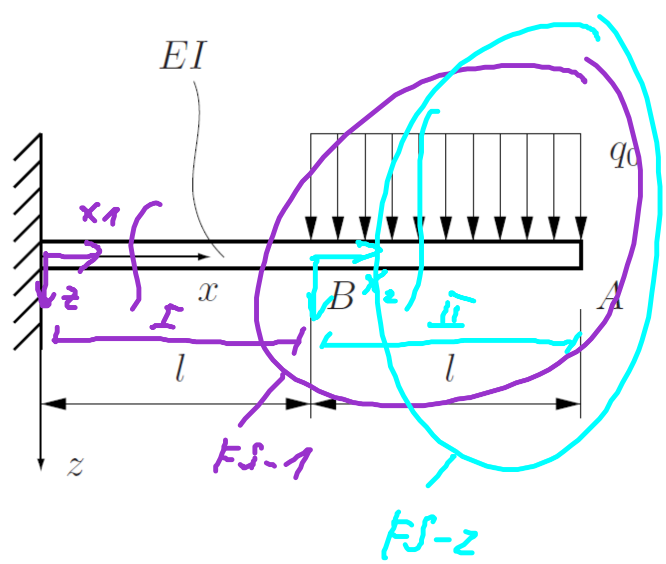


$$\left.\begin{aligned} &\boxed{I_y = \frac{\pi}{4} r^4} \\ &I_z = \frac{\pi}{4} r^4 \end{aligned}\right\} \quad I_y + I_z = \frac{\pi}{2} r^4 = I_p$$

Tut	Ma
105, 121	107, 122, 124

108. Aufgabe

108. Der abgebildete schlanke Balken (Biegesteifigkeit EI) ist links fest eingespannt und wird im Abschnitt BA durch eine konstante Streckenlast q_0 belastet. Bestimmen Sie die Absenkung des Punktes A. $\longrightarrow$ $w(x)$ $\longrightarrow$ w_A



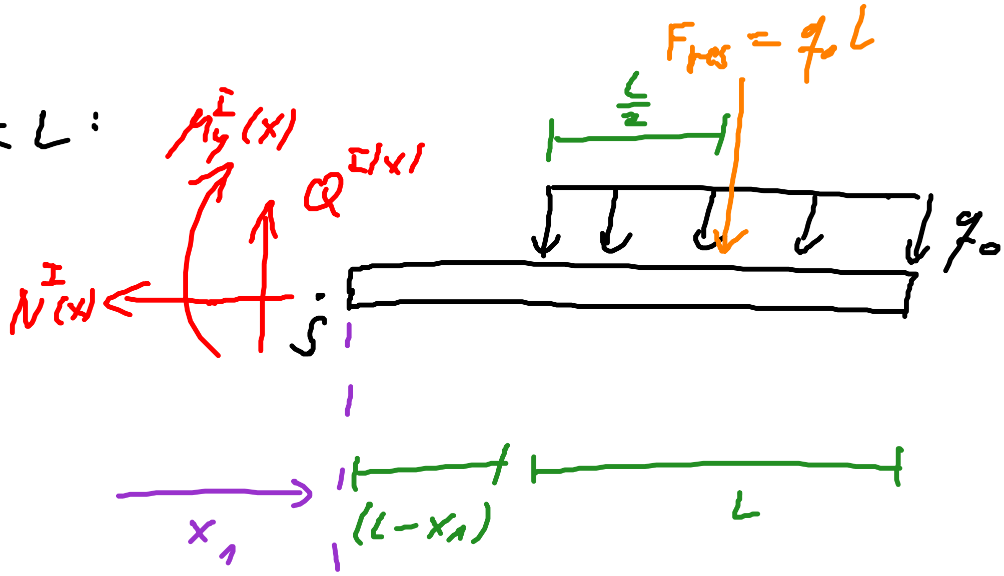
Geg.: q_0, l, EI

$$-EI\, w''(x) = M_y(x)$$

1.) $M_y(x)$:

I) $0 < x_1 < L$:

FS:

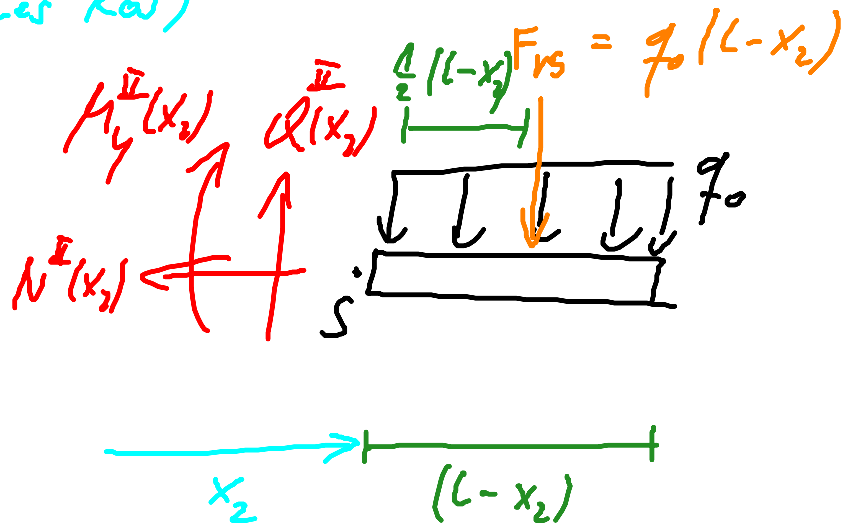


GGB: $\sum M_y^{(S)} \stackrel{!}{=} 0$, $0 = -M_y^I(x_1) - q_0 L\left(\frac{L}{2} + (L - x_1)\right)$

$$\boxed{M_y^I(x_1) = -q_0 L\left(\frac{3}{2}L - x_1\right)}$$

II) $0 < x_2 < L$ (Neues Kos)

FS-2:



GGB: $\sum M_y^{(S)} \stackrel{!}{=} 0$, $0 = -M_y^{II}(x_2) - q_0(L - x_2)\cdot\frac{1}{2}(L - x_2)$

$$\boxed{M_y^{II}(x_2) = -q_0\frac{1}{2}(L - x_2)^2}$$

2.) In DGL einsetzen & Integrieren

I) $0 < x_1 < l$:

$$\cancel{-}\, EI\, w''(x_1) = M^{I}(x_1) = \cancel{-}\, q_0 l \left(\frac{3}{2} l - x_1\right)$$

$$EI\, w'(x_1) = \int q_0 l \left(-x_1 + \frac{3}{2} l\right) dx_1 + C_1$$

$$= q_0 l \left(-\frac{1}{2} x_1^2 + \frac{3}{2} l x_1\right) + C_1$$

$$EI\, w(x_1) = q_0 l \left(-\frac{1}{6} x_1^3 + \frac{3}{4} l x_1^2\right) + C_1 x_1 + C_2$$

II) $0 < x_2 < l$:

$$-EI\, w''(x_2) = M^{II}(x_2) = -\frac{1}{2} q_0 (l - x_2)^2$$

$$= -\frac{1}{2} q_0 \left(l^2 - 2 l x_2 + x_2^2\right)$$

$$EI\, w''(x_2) = \frac{1}{2} q_0 \left(x_2^2 - 2 l x_2 + l^2\right)$$

$$EI\, w'(x_2) = \frac{1}{2} q_0 \left(\frac{1}{3} x_2^3 - l x_2^2 + l^2 x_2\right) + C_3$$

$$EI\, w(x_2) = \frac{1}{2} q_0 \left(\frac{1}{12} x_2^4 - \frac{1}{3} l x_2^3 + \frac{1}{2} l^2 x_2^2\right) + C_3 x_2 + C_4$$

4 Konstanten $\Longrightarrow$ 4 RBen / ÜBen

3.) Konstanten bestimmen:

$w(x)$ oder $w'(x)$ an bestimmter Stelle

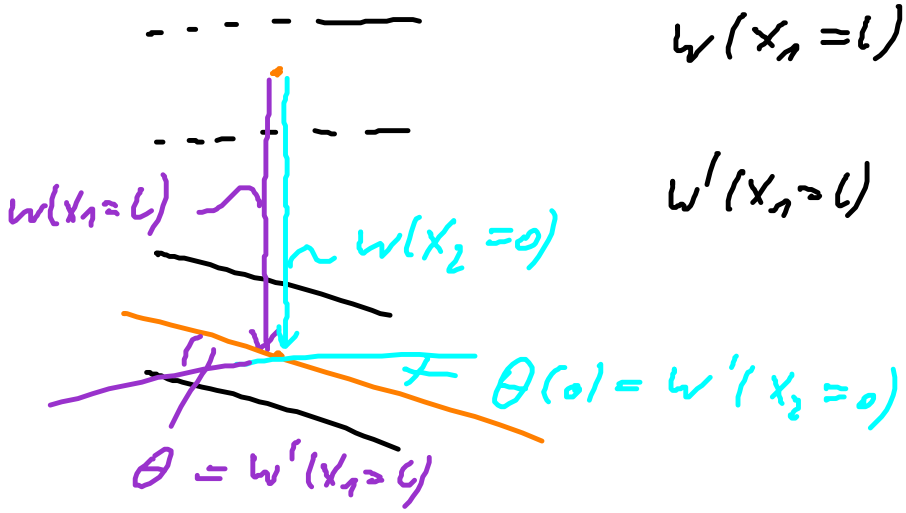
$x_1 = 0$:

$w(x_1=0) = 0$ RB-1

$w'(x_1=0) = 0$ RB-2

feste Einspannung

$x_1 = l,\ x_2 = 0$: Übergang



$w(x_1=l) = w(x_2=0)$ – üB-1

$w'(x_1=l) = w'(x_2=0)$ – üB 2

RB-1: $EI \cdot 0 = 0 + C_2 \Rightarrow C_2 = 0$

RB-2: $EI \cdot 0 = 0 + C_1 \Rightarrow C_1 = 0$

üB-2: $-q_0 l \left(\frac{1}{2} l^2 - \frac{3}{2} l^2\right) = C_3$

$$C_3 = q_0 l^3$$

üB-1: $-q_0 l \left(\frac{1}{6} l^3 - \frac{3}{4} l^3\right) = C_4$

$$-q_0 l^4\left(-\frac{7}{12}\right) \Rightarrow c_4 = \frac{7}{12} q_0 l^4$$

Damit:

$$w(x_1) = \frac{-q_0 l}{EI}\left(\frac{1}{6}x_1^3 - \frac{3}{4} l x_1^2\right)$$

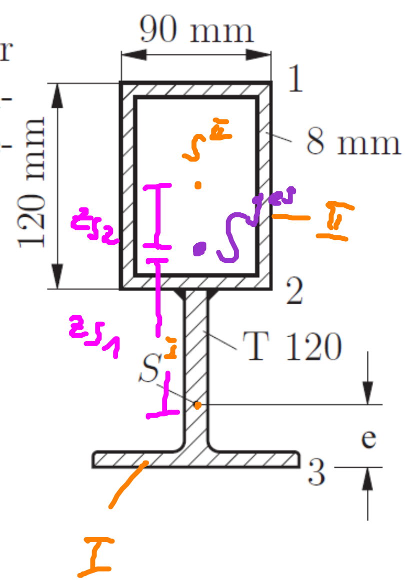
$$w(x_2) = \frac{1}{EI}\left(\frac{1}{2} q_0\left(\frac{1}{12}x_2^4 - \frac{1}{3} l x_2^3 + \frac{1}{2} l^2 x_2^2\right) + q_0 l^3 x_2 + \frac{7}{12} q_0 l^4\right)$$

$$w_A = w(x_2 = l) = \frac{41}{24}\frac{q_0 l^4}{EI}$$

Durchbiegung in A

2. Aufgabe

Berechnen Sie das Flächenträgheitsmoment der beiden Balkenquerschnitte bezüglich der horizontalen Achse durch den Schwerpunkt des Gesamtquerschnitts.



Profil T 120:
$I_0 = 366\ \text{cm}^4$
Fläche:
$A = 29,6\ \text{cm}^2$
$e = 3,28\ \text{cm}$

zusammengesetzter Querschnitt

$$I_y^{ges} = \sum_{i=1}^{2} I_y^i + \sum_{i=1}^{2} z_{S_i}^2 A_i$$

bezügl. SP | kleiner Anteil

1.) z_S^{ges}: $z_S^{ges} = \frac{\Sigma z_i A_i}{\Sigma A_i}$

bzgl. Oberkante

i	z_i [mm]	A_i [mm²]	$z_i A_i$ [mm³]
1	207,2	2960	$613,312 \cdot 10^3$
2	60	3104	$186,24 \cdot 10^3$

$z_1 = (120 + 120 - e)$ mm $= 207,2$

Höhe von T – 120

$A_1 = 29,6$ cm² $= 29,6 \cdot 10^2$ mm²

$A_2 = ((120 \times 90) - (74 \times 104))$ mm² $= 186,24 \cdot 10^3$ mm²

$z_S = \frac{\Sigma A_i z_i}{\Sigma A_i} = 131,9$ mm

Gesamt-SP bezügl. Oberkante

2.) Gesamt-FTM

$$I_y^{ges} = \sum I_y^i + \sum z_{S_i}^2 A_i$$

i	$z_{S_i} = \lvert z_i - z_S^{ges} \rvert$ [mm]	I_{yy}^i [mm^4]
1	75,3	$366 \cdot 10^4$
2	71,9	$6{,}023 \cdot 10^6$

NR:

$$\lvert z_{S_1} \rvert = (207{,}2 - 131{,}9)\ mm$$

$$\lvert z_{S_2} \rvert = (60 - 131{,}9)\ mm$$

$$I_{yy}^2 = \Bigg[\underbrace{\frac{1}{12}\left(90 \times (120)^3\right)}_{\text{Außen}} - \underbrace{\frac{1}{12}\left(74 \times (104)^3\right)}_{\text{Innen}}\Bigg]\ mm^4$$

$$I_y^{ges} = \sum I_y^i + \sum z_{S_i}^2 A_i = 45{,}51 \cdot 10^6\ mm^4$$

$$= \underline{\underline{45{,}51 \cdot 10^2\ cm^4}}$$