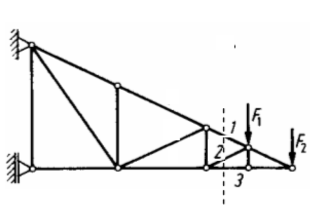
Mechanik I / Prof. Popov / Vorlesung 8.

I. Fachwerke: Rittersches Schnittverfahren. II. Schnittlasten bei Balken.

Literatur: ***Hauger, Schnell und Groß.*** **Technische Mechanik 1 (Statik), 6.3.3. 7.1, 7.2.1, 7.2.2**

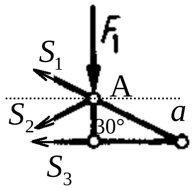
I. Rittersches Schnittverfahren



B1. Das Knotenpunktverfahren ist immer anwendbar. Sind aber nur *einzelne* Stabkräfte zu bestimmen, so ist es oft vorteilhaft, das Schnittverfahren nach Ritter zu benutzen. <u>Die Idee:</u> Das oben gezeigte Fachwerk kann man als aus zwei Teilen bestehend ansehen. Der Teil links vom Schnitt spielt die Rolle einer "starren Wand" und das rechte Dreieck ist ein starrer Körper, der dreiwertig gelagert ist. Die Stabkräfte in den drei geschnittenen Stäben können ermittelt werden, ohne irgendwas vom Rest der Konstruktion zu wissen.

Gleichzeitig illustriere ich das *Superpositionsprinzip* für statisch bestimmte Systeme und betrachte zwei folgende Teilaufgaben:

A1. $F_2 = 0$, $F_1 \neq 0$

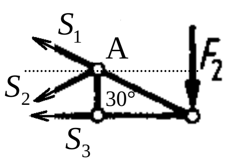


x:
$$-S_1 \cos 30° - S_2 \cos 30° - S_3 = 0$$
y:
$$-F_1 + S_1 \sin 30° - S_2 \sin 30° = 0$$
$$\mathrm{M}^{(A)}:\ -S_3 a = 0$$

Daraus folgt:
$S_3 = 0$, $S_2 = -S_1$, $S_1 = F_1$.
Diese Ergebnisse können wir in einer Tabelle zusammenfassen:

$$\boxed{\left\{\begin{matrix} S_1 = F_1 \\ S_2 = -F_1 \\ S_3 = 0 \end{matrix}\right\}}$$

A2. $F_2 \neq 0$, $F_1 = 0$



x:
$$-S_1 \cos 30° - S_2 \cos 30° - S_3 = 0$$
y:
$$-F_2 + S_1 \sin 30° - S_2 \sin 30° = 0$$
$$\mathrm{M}^{(A)}:\ -S_3 a - F_2 a \cot 30° = 0$$

Daraus folgt: $S_3 = -F_2 \cot 30°$,
$$S_1 + S_2 = -\frac{S_3}{\cos 30°} = \frac{F_2 \cot 30°}{\cos 30°} = \frac{F_2}{\sin 30°},$$
$$S_1 - S_2 = \frac{F_2}{\sin 30°}.$$
Summieren dieser Gleichungen ergibt
$S_1 = \dfrac{F_2}{\sin 30°}$. Subtrahieren: $S_2 = 0$.
Ergebnistabelle:

$$\boxed{\left\{\begin{matrix} S_1 = F_2 / \sin 30° \\ S_2 = 0 \\ S_3 = -F_2 \cot 30° \end{matrix}\right\}}$$

A3. $F_2 \neq 0$, $F_1 \neq 0$.

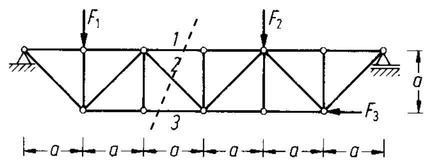
$$\boxed{\left\{\begin{matrix} S_1 = F_1 + F_2 / \sin 30° \\ S_2 = -F_1 \\ S_3 = -F_2 \cot 30° \end{matrix}\right\}}$$

Das Superpositionsprinzip:

Reaktionen (Äußeres Kraftsystem 1 + äußeres Kraftsystem 2)= Reaktionen (Kraftsystem 1)+ Reaktionen (Kraftsystem 2)

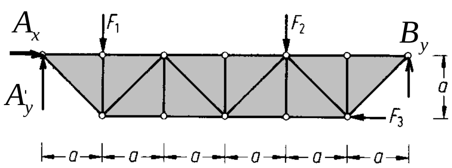
(gilt für <u>alle</u> statisch bestimmte Systeme, nicht nur für Fachwerke!)

B2. Bei dem gezeigten Fachwerk sind die Kräfte in den Stäben 1,2,3 gesucht.



<u>*Lösung:*</u> <u>Schritt 1</u>: Wir machen einen Schnitt durch die drei Stäbe. Dadurch wird das Fachwerk in zwei starre Körper zerlegt. Es gibt sechs Freiheitsgrade, drei äußere Lagerreaktionen und drei Stabkräfte $\Rightarrow$ Aufgabe ist lösbar (gerade deswegen muss der Schnitt immer über *drei* Stäbe oder ein Gelenk und einen Stab gehen).

<u>Schritt 2:</u> Die äußeren Reaktionen können durch einen Freischnitt des Systems als Ganzes ermittelt



werden: x: $A_x - F_3 = 0$,

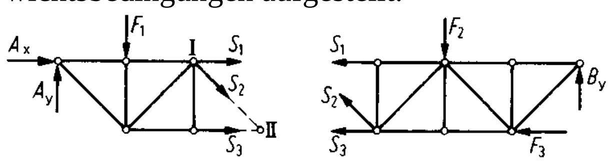
y: $A_y - F_1 - F_2 + B_y = 0$,

$\mathrm{M}^{(A)}$: $-F_1 a - F_2 4a + B_y 6a - F_3 a = 0$.

Daraus folgt: $A_x = F_3$, $B_y = \dfrac{F_1}{6} + \dfrac{2}{3}F_2 + \dfrac{F_3}{6}$,

$$A_y = F_1 + F_2 - \left(\frac{F_1}{6} + \frac{2}{3}F_2 + \frac{F_3}{6}\right) = \frac{5}{6}F_1 + \frac{1}{3}F_2 - \frac{F_3}{6}$$

<u>Schritt 3:</u> Linker und rechter Teil werden vollständig freigeschnitten und die Gleichgewichtsbedingungen aufgestellt.



Es reichen beliebige *drei* von insgesamt sechs verfügbaren Gleichungen, da wir drei Reaktionen bereits kennen. Am sinnvollsten ist es, zwei Momentengleichungen bezüglich der Knoten und eine weitere beliebige Gleichung zu nehmen (in diesem Fall am besten in vertikaler Richtung).

Linker Teil:

$\mathrm{M}^{(\mathrm{I})}$: $-2aA_y + aF_1 + aS_3 = 0$

y: $A_y - F_1 - S_2\dfrac{\sqrt{2}}{2} = 0$,

$$S_3 = 2A_y - F_1 = \left(\frac{5}{3}F_1 + \frac{2}{3}F_2 - \frac{F_3}{3}\right) - F_1$$

$$\boxed{S_3 = \frac{2}{3}F_1 + \frac{2}{3}F_2 - \frac{F_3}{3}}$$

$$\boxed{S_2 = \sqrt{2}\left(A_y - F_1\right) = \sqrt{2}\left(-\frac{1}{6}F_1 + \frac{1}{3}F_2 - \frac{F_3}{6}\right)}$$

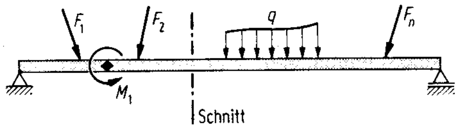
Rechter Teil:

$\mathrm{M}^{(\mathrm{II})}$: $aS_1 - aF_2 + 3aB_y = 0$,

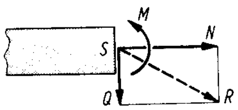
$$S_1 = F_2 - 3B_y = F_2 - \frac{F_1}{2} - 2F_2 - \frac{F_3}{2}$$

$$\boxed{S_1 = -\frac{F_1}{2} - F_2 - \frac{F_3}{2}}.$$

II. Schnittlasten (oder Schnittgrößen) bei Balken



Ein belasteter Balken wird durch innere Kräfte zusammengehalten. Diese werden "sichtbar"



gemacht durch einen gedanklichen Schnitt durch den Balken und heißen daher *Schnittgrößen* oder *Schnittlasten*. Diese Schnittlasten sind nichts anderes als Reaktionskräfte, die ein Teil des Balkens auf den anderen ausübt. In jedem Balkenschnitt gibt es im Allgemeinen drei Reaktionen in zwei Dimensionen und sechs Schnittgrößen im dreidimensionalen Fall.

Definitionen und Zeichenvereinbarung

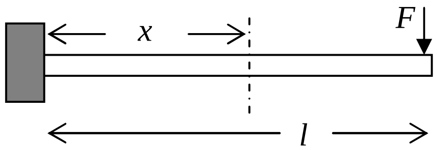
Die *Normalkraft* N ist eine in Richtung der Stabachse wirkende Kraft. Sie wird für den *linken* Teil *nach rechts* und für den rechten Teil nach links wirkend positiv angenommen.

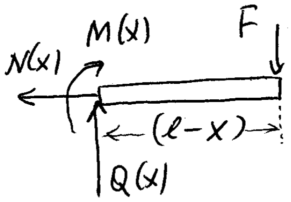
Die *Querkraft* Q ist eine senkrecht zur Stabachse wirkende Kraft. Sie wird für den *linken* Balkenteil *nach unten* und für den rechten teil nach oben wirkend positiv angenommen.

Das *Biegemoment* soll für den linken Teil entgegen dem Uhrzeigersinn und für den rechten Teil im Uhrzeigersinn drehend positiv angenommen werden.

Besteht bei einer komplizierteren Struktur eine Verwechselungsgefahr, so wird "unten" an jeder Stelle willkürlich definiert und durch eine gestrichelte Linie gekennzeichnet.

B3.



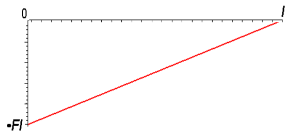


Drei Gleichgewichtsgleichungen:

$N(x) = 0$,

$Q(x) = F$,

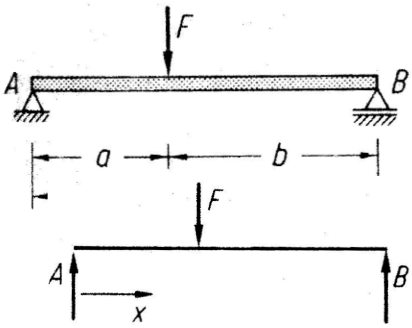
$M(x) = -F\cdot(l-x)$.



Verlauf des Biegemomentes:

Moment ist an der Einspannstelle maximal.

B4. Zu bestimmen sind die Schnittgrößen im unten gezeigten Balken.

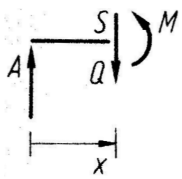


Lösung:

Wir betrachten drei Schnitte:

(**A**) Der ganze Balken freigeschnitten von den Lagern. Daraus folgt:

$$B = \frac{a}{l}F, \quad A = \frac{b}{l}F.$$



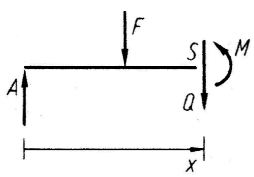
(**B**) Schnitt vor dem Angriffspunkt der Kraft.

$$A - Q = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{Q = A = \frac{b}{l}F}.$$

$$-xA + M = 0 \Rightarrow \boxed{M = xA = x\frac{b}{l}F}$$

(**C**) Schnitt nach dem Angriffspunkt der Kraft:

$$A - F - Q = 0$$



$$\Rightarrow \boxed{Q = A - F = -\frac{a}{l}F}$$

$$-xA + F(x-a) + M = 0$$

$$\boxed{M = (1 - x/l)\,aF}.$$