

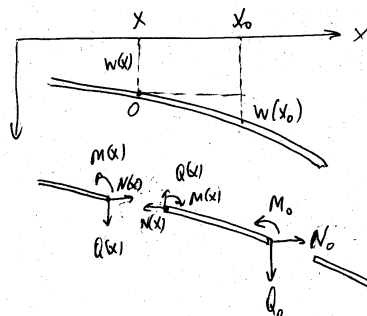
Knickung (Fortsetzung). Eulersche Knickfälle

Literatur: Hauger, Schnell und Groß. Technische Mechanik 2 (Elastostatik), 7.2

I. Eulersche Knickungsgleichung vierter Ordnung

Ein Stab sei in der x -Richtung auf Druck mit einer Kraft F belastet. Wir schneiden ein Element zwischen x und x_0 frei und stellen

Gleichgewichtsbedingungen auf. Kräftegleichgewicht in der x -Richtung ergibt



Gleichgewicht in der x -Richtung ergibt

$$N(x) = N_0 = -F.$$

In der w -Richtung:

$$Q(x) = Q_0.$$

Momentengleichgewicht

bezüglich des Punktes O:

$$-M(x) + M_0 + N_0(w(x_0) - w(x)) - Q_0(x_0 - x) = 0.$$

Unter Benutzung der Balkengleichung folgt:

$$EIw''(x) = -M(x) = -M_0 - N_0(w(x_0) - w(x)) + Q_0(x_0 - x) = -M_0 + F(w(x_0) - w(x)) + Q_0(x_0 - x).$$

Zweimaliges Differenzieren ergibt

$$(EIw''(x))'' = -Fw''(x) \quad (\text{Eulersche Gleichung}).$$

Für einen homogenen Stab ($EI = const$) folgt:

$$EIw^{IV}(x) = -Fw''(x)$$

oder $w^{IV}(x) = -\lambda^2 w''(x)$ mit $\lambda^2 = F / EI$.

Diese Gleichung enthält zunächst *keine Randbedingungen* und kann daher in allgemeiner Form gelöst werden.

Es ist leicht zu prüfen, daß folgende Funktionen Lösungen der Eulerschen Gleichung sind:

$$w_1(x) = A \cos \lambda x, \quad w_2(x) = B \sin \lambda x,$$

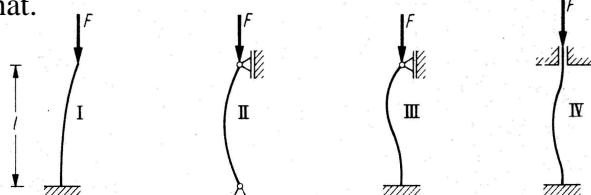
$$w_3(x) = Cx, \quad w_4(x) = D.$$

Die allgemeine Lösung lautet somit

$$w(x) = A \cos \lambda x + B \sin \lambda x + Cx + D. \quad (1)$$

II. Eulersche Knickfälle

Abhängig von der Lagerung unterscheidet man vier Fälle, die bereits Leonard Euler untersucht hat.



Fall II: Randbedingungen: $w(0) = 0$, $w''(0) = 0$ (kein Moment), $w(l) = 0$, $w''(l) = 0$.

Einsetzen in die allgemeine Lösung (1) liefert:

$$w(0) = A \cos 0 + B \sin 0 + C \cdot 0 + D = A + D = 0$$

$$w''(0) = -A\lambda^2 \cos 0 - B\lambda^2 \sin 0 = -A\lambda^2 = 0$$

$$\Rightarrow A = 0, D = 0.$$

$$w(l) = B \sin \lambda l + Cl = 0$$

$$w''(l) = -\lambda^2 B \sin \lambda l = 0$$

$$\Rightarrow C = 0, \sin \lambda l = 0 \Rightarrow \lambda l = \pi n$$

(n ist eine ganze Zahl),

$$\lambda^2 = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 = \frac{F}{EI} \Rightarrow F_k = EI \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2.$$

Fall IV: Die Randbedingungen lauten:

$$w(0) = 0, w'(0) = 0, w(l) = 0, w'(l) = 0.$$

Daraus folgt:

$$w(0) = A \cos 0 + B \sin 0 + C \cdot 0 + D = A + D = 0$$

$$w'(0) = -A\lambda \sin 0 + B\lambda \cos 0 + C = B\lambda + C = 0$$

$$w(l) = A \cos \lambda l + B \sin \lambda l + Cl + D$$

$$= A \cos \lambda l + B \sin \lambda l - B\lambda l - A = 0$$

$$w'(l) = -A\lambda \sin \lambda l + B\lambda \cos \lambda l + C$$

$$= -A\lambda \sin \lambda l + B\lambda \cos \lambda l - B\lambda = 0$$

oder

$$\begin{pmatrix} (\cos \lambda l - 1) & (\sin \lambda l - \lambda l) \\ -\lambda \sin \lambda l & \lambda (\cos \lambda l - 1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Diese Gleichung hat nur dann nicht triviale Lösungen wenn die Determinante verschwindet:

$$\begin{vmatrix} (\cos \lambda l - 1) & (\sin \lambda l - \lambda l) \\ -\lambda \sin \lambda l & \lambda (\cos \lambda l - 1) \end{vmatrix}$$

$$= \lambda \left[(\cos \lambda l - 1)^2 + \sin \lambda l (\sin \lambda l - \lambda l) \right] =$$

$$= \lambda \left[2(1 - \cos \lambda l) - \lambda l \sin \lambda l \right] = 0$$

oder

$$\sin \frac{\lambda l}{2} \left[4 \sin \frac{\lambda l}{2} - \frac{\lambda l}{2} \cos \frac{\lambda l}{2} \right] = 0 \Rightarrow$$

$$\sin \frac{\lambda l}{2} = 0 \Rightarrow \frac{\lambda l}{2} = \pi n, \quad F_k = 4EI \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2.$$

Fall I: Die Randbedingungen lauten in diesem Fall:

$$w(0) = 0, w'(0) = 0, w''(l) = 0$$

(kein Moment),

$$Q(l) = -EIw'''(l) = w'(l)F.$$

Daraus folgt:

$$w(0) = A + D = 0$$

$$w'(0) = B\lambda + C = 0$$



$$w''(l) = -A\lambda^2 \cos \lambda l - B\lambda^2 \sin \lambda l = 0$$

$$w'''(l) = A\lambda^3 \sin \lambda l - B\lambda^3 \cos \lambda l$$

$$= -\frac{F}{EI}(-A\lambda \sin \lambda l + B\lambda \cos \lambda l + C)$$

Die letzte Gleichung kann auch als

$$A\lambda^3 \sin \lambda l - B\lambda^3 \cos \lambda l$$

$$= -\frac{F}{EI}(-A\lambda \sin \lambda l + B\lambda \cos \lambda l - B\lambda)$$

umgeschrieben werden oder

$$A\lambda^3 \sin \lambda l - B\lambda^3 \cos \lambda l$$

$$= \lambda^2 (A\lambda \sin \lambda l - B\lambda \cos \lambda l + B\lambda)$$

$$\begin{pmatrix} -\lambda^2 \cos \lambda l & -\lambda^2 \sin \lambda l \\ 0 & -\lambda^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda^2 \cos \lambda l & -\lambda^2 \sin \lambda l \\ 0 & -\lambda^3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\cos \lambda l = 0, \Rightarrow \lambda l = \pi/2 \Rightarrow F_k = \frac{1}{4} EI \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2$$

Aufgabe: Ein zwischen zwei festen Wänden gespannter stählerner Stab mit $l/a = 100$ wird gleichmäßig erwärmt. Bei welcher Temperaturerhöhung ΔT knickt der Stab? ($\alpha = 1,2 \cdot 10^{-5} K^{-1}$).

Lösung: Thermische Spannung ist gleich $\sigma_T = -E\alpha\Delta T$. Die Druckkraft

$|F| = |\sigma_T A| = E\alpha\Delta T A$ muss den kritischen Wert $F_k = \pi^2 EI / l^2$ erreichen: $E\alpha\Delta T A = \pi^2 EI / l^2$.

Der Stab wird instabil bei $\Delta T = \frac{\pi^2 EI}{AE\alpha l^2}$.

Für einen runden Stab mit Radius a gilt:

$$\Delta T = \frac{\pi^2 \pi a^4}{4\pi a^2 \alpha l^2} = \frac{\pi^2 a^2}{4\alpha l^2} = \frac{1}{4} \frac{\pi^2}{\alpha} \left(\frac{a}{l} \right)^2$$

Für $a/l = 100$ ergibt sich

$$\Delta T \approx \frac{1}{4} \frac{10 \cdot 10^{-4}}{1,2 \cdot 10^{-5}} \approx 20 \text{ K}$$

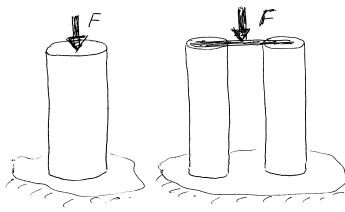
III. Ein Bein oder mehrere Beine?

Ein runder, fest eingebetteter Stab (Radius R_1)

kann eine Last

$$F_1 = \frac{\pi^2 EI}{4l^2} = \frac{\pi^3 ER_1^4}{16l^2}$$

aushalten. Werden aus dem gleichen Material zwei Stäbe mit dem gleichen Gewicht gemacht, so werden sie Radien $R_2 = R_1 / \sqrt{2}$ ha-



ben. Sie können eine Last $F_2 = 2 \frac{\pi^3 ER_2^4}{16l^2} = \frac{1}{2} F_1$

tragen, die zwei Mal kleiner ist als F_1 . Generell gilt: je mehr Beine desto kleiner ist die kritische Last (bzw. desto größer das Gewicht der erforderlichen Konstruktion). Die optimalen Strukturen von Druckstäben sind daher Strukturen mit nur einem Kräftigen Druckstab. So sind Pflanzen, Tiere und viele moderne Bauten aufgebaut (eine zentrale tragende Säule, auf der alles aufgehängt wird).

IV. Andere Arten von Instabilitäten

(A) Wird ein Stab verdreht, so wird die gerade Lage seiner Achse instabil und

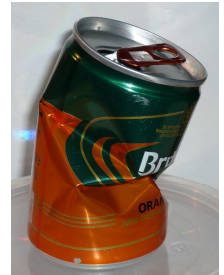


biegt sich zu einer Schraubenlinie sobald der

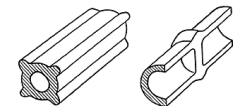
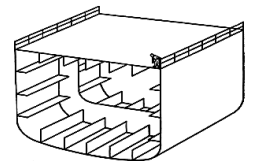
Drehwinkel größer wird als $\varphi_{\max} = \frac{9EI}{GI_p}$. Für

einen runden Stab gilt $\varphi_{\max} = 9(1+\nu)$. Ein metallischer Draht wird daher bei $\varphi \approx 12$ instabil werden (ca. zwei volle Umdrehungen).

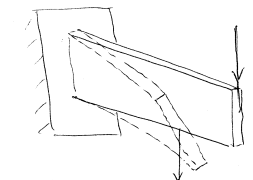
(B) Um maximale Stabilität einer Säule zu erzielen, sollte sie einen möglichst großen Radius (bei entsprechend dünner Wand) haben. Allerdings wird ein solcher dünnwandiger Zylinder "lokal instabil" wenn die Spannung in der Wand den Wert $\sigma = Et/4R$ erreicht, wobei t Dicke der



Wand ist. Um diese Art der Instabilität zu vermeiden, werden Wände wie auf dem Bild rechts verstärkt (wird im Schiffsbau, Flugzeugbau usw. benutzt). Auch Pflanzen verstärken die Wände auf eine der nebenstehend gezeigten Arten.



(C) Soll eine Struktur nur vertikale Lasten tragen, so soll ein optimaler Querschnitt möglichst große Höhe und kleine Breite haben. Der Träger wird aber instabil und



verdreht sich bei $F_{kr} \approx \frac{2bh^3 E}{l^2 \sqrt{1+\nu}} \approx \frac{1,7bh^3 E}{l^2}$.

(D) Eine weitere Methode zur Vermeidung von Instabilitäten: Druckkräfte vermeiden (Speichen).