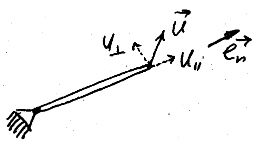
Mechanik I / Prof. Popov / Vorlesung 15. **Teil 2: Elastostatik**

Statisch bestimmte und statisch unbestimmte elastische Stabsysteme

Literatur: ***Hauger, Schnell und Groß.*** **Technische Mechanik 2 (Elastostatik), 1.5,1.6.**

I. Hilfsaufgabe



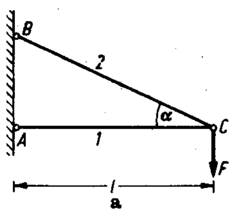
Ein elastischer Stab sei an einem Ende in einem Festlager befestigt. Das andere Ende wird aus der Anfangslage um den Vektor $\vec{u}$ verschoben. Wie ändert sich die Länge des Stabes?

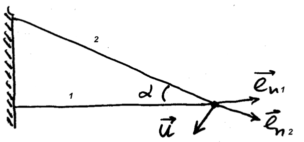
<u>*Lösung:*</u> Wenn die Verschiebung klein ist, so verursacht nur die Komponente der Verschiebung in der Stabrichtung eine Längenänderung: $\Delta l = u_{\|}$. Wenn wir einen Einheitsvektor $\vec{e}_n$ in der Stabrichtung einführen, kann man auch schreiben

$$\boxed{\Delta l = \vec{u} \cdot \vec{e}_n}$$

II. Statisch bestimmtes Stabwerk 1

Zwei Stäbe mit der gleichen Dehnsteifigkeit EA sind gelenkig gelagert und mit einander verbunden, wie im Bild gezeigt. Gesucht ist die Verschiebung des Knotens C.



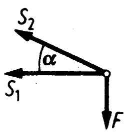


Bezeichnen wir die Verschiebung des Knotens mit $\vec{u} = (u_x, u_y)$ und bestimmen die Einheitsvektoren in der Richtung des ersten und des zweiten Stabes:

$\vec{e}_{n1} = (1,0)$, $\vec{e}_{n2} = (\cos\alpha, -\sin\alpha)$.

Die Längenänderungen der beiden Stäbe sind dann

$$\left.\begin{aligned} &\Delta l_1 = \vec{u} \cdot \vec{e}_{n1} = (u_x, u_y) \cdot (1,0) = u_x, \\ &\Delta l_2 = \vec{u} \cdot \vec{e}_{n2} = (u_x, u_y) \cdot (\cos\alpha, -\sin\alpha) \\ &= u_x \cos\alpha - u_y \sin\alpha \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$



Die Stabkräfte sind somit

$$S_1 = \frac{EA}{l_1}\Delta l_1, \; S_2 = \frac{EA}{l_2}\Delta l_2. \qquad (2)$$

Die Gleichgewichtsbedingungen lassen sich in der folgenden Form schreiben:

x: $-S_2 \cos\alpha - S_1 = 0$,

y: $S_2 \sin\alpha - F = 0$.

Einsetzen von (2) liefert

$$-\frac{EA}{l_2}\Delta l_2 \cos\alpha - \frac{EA}{l_1}\Delta l_1 = 0,$$

$$\frac{EA}{l_2}\Delta l_2 \sin\alpha - F = 0.$$

Einsetzen von (1) und Berücksichtigung, dass $l_2 = l_1 / \cos\alpha$, führt zum Gleichungssystem

$$\left.\begin{aligned} &-\frac{EA}{l_1}\cos\alpha\left(u_x\cos\alpha - u_y\sin\alpha\right)\cos\alpha - \frac{EA}{l_1}u_x = 0 \\ &\frac{EA}{l_1}\cos\alpha\left(u_x\cos\alpha - u_y\sin\alpha\right)\sin\alpha - F = 0 \end{aligned}\right\}$$

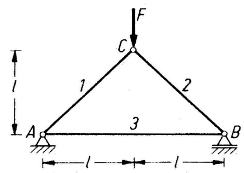
oder

$$\left.\begin{aligned} &u_x\left(1+\cos^3\alpha\right) - u_y \sin\alpha\cos^2\alpha = 0 \\ &u_x \sin\alpha\cos^2\alpha - u_y\sin^2\alpha\cos\alpha = \frac{Fl_1}{EA} \end{aligned}\right\}$$

Daraus folgt

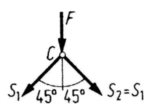
$$\boxed{\begin{aligned} &u_x = -\frac{Fl_1}{EA}\frac{1}{\tan\alpha} \\ &u_y = -\frac{Fl_1}{EA}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1+\cos^3\alpha}{\sin\alpha\cos^2\alpha} = -\frac{Fl_1}{EA}\frac{1+\cos^3\alpha}{\sin^2\alpha\cos\alpha} \end{aligned}}$$

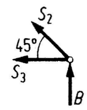
III. Statisch bestimmtes Stabwerk 2



Ein Fachwerk, das aus drei Stahlstäben besteht, wird durch die Kraft $F = 20\,\text{kN}$ belastet. Wie groß müssen die Querschnittsflächen mindestens sein, wenn die Spannungen nicht größer als $\sigma_{zul} = 150\,\text{MPa}$ und die Verschiebung des Lagers B kleiner als $0{,}05\%$ der Länge des Stabes 3 sein sollen?

<u>*Lösung:*</u> Da das Stabwerk statisch bestimmt ist, kann man die Stabkräfte direkt aus den Gleichgewichtsbedingungen bestimmen.





$$S_1 = S_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}F,$$

$$S_3 = \frac{F}{2}.$$

Damit die zulässige Spannung nicht überschritten wird, muss gelten:

$$|\sigma_1| = \frac{|S_1|}{A_1} \le \sigma_{zul}, \; |\sigma_2| = \frac{|S_2|}{A_2} \le \sigma_{zul}, \; |\sigma_3| = \frac{|S_3|}{A_3} \le \sigma_{zul}$$

Daraus folgt für die mindestens erforderlichen Querschnittsflächen

$$A_1 = A_2 = \frac{|S_1|}{\sigma_{zul}} = \frac{0{,}707 \cdot 20 \cdot 10^3}{150 \cdot 10^6}[\text{m}^2] = 94{,}3\,\text{mm}^2$$

$$A_3 = \frac{|S_3|}{\sigma_{zul}} = \frac{0{,}5 \cdot 20 \cdot 10^3}{150 \cdot 10^6}[\text{m}^2] = 66{,}7\,\text{mm}^2.$$

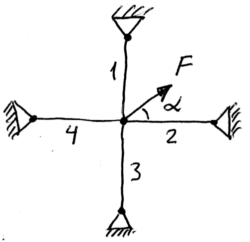
Aus dem Hookeschen Gesetz für Stab 3folgt:

$\frac{|S_3|}{A_3} = E\frac{|\Delta l_3|}{l_3}$ und wir erhalten

$$A_3 = \frac{|S_3|}{E\left(|\Delta l_3| / l_3\right)} \geq \frac{0,5 \cdot 20 \cdot 10^3}{2,1 \cdot 10^{11} 0,5 \cdot 10^{-3}} [\mathrm{m}^2]$$

$$= 9,5 \cdot 10^{-5} [\mathrm{m}^2] = 95\,\mathrm{mm}^2$$

IV. Statisch unbestimmtes Stabwerk 1



Gegeben sind die Steifigkeiten c der Stäbe. Zu berechnen ist die Verschiebung des Knotens. Wir führen den Verschiebungsvektor und die Einheitsvektoren ein:

$\vec{u} = \left(u_x, u_y\right)$,

$\vec{e}_1 = (0,-1)$, $\quad \vec{e}_2 = (-1,0)$,

$\vec{e}_3 = (0,1)$, $\quad \vec{e}_4 = (1,0)$.

Die Längenänderungen sind

$$\Delta l_1 = \vec{u} \cdot \vec{e}_1 = \left(u_x, u_y\right) \cdot (0,-1) = -u_y$$

$$\Delta l_2 = \vec{u} \cdot \vec{e}_2 = \left(u_x, u_y\right) \cdot (-1,0) = -u_x$$

$$\Delta l_3 = \vec{u} \cdot \vec{e}_3 = \left(u_x, u_y\right) \cdot (0,1) = u_y$$

$$\Delta l_4 = \vec{u} \cdot \vec{e}_4 = \left(u_x, u_y\right) \cdot (1,0) = u_x$$

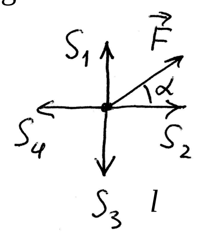
Für die Stabkräfte ergibt sich

$$S_1 = c\Delta l_1 = -cu_y$$

$$S_2 = c\Delta l_2 = -cu_x$$

$$S_3 = c\Delta l_3 = cu_y$$

$$S_4 = c\Delta l_4 = cu_x$$



l

Kräftegleichgewicht:

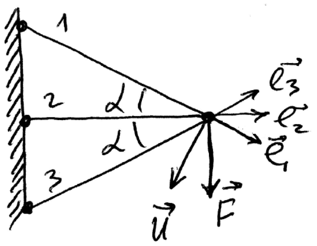
$$\left.\begin{array}{l} \text{x: } S_2 - S_4 + F\cos\alpha = 0 \\ \text{y: } S_1 - S_3 + F\sin\alpha = 0 \end{array}\right\}$$

$$-cu_x - cu_x + F\cos\alpha = 0 \Rightarrow 2cu_x = F\cos\alpha$$

$$-cu_y - cu_y + F\sin\alpha = 0 \Rightarrow 2cu_y = F\sin\alpha$$

$$\left.\begin{array}{l} u_x = \frac{F}{2c}\cos\alpha = \frac{F_x}{2c} \\ u_y = \frac{F}{2c}\sin\alpha = \frac{F_y}{2c} \end{array}\right\} \quad \boxed{\vec{u} = \frac{\vec{F}}{2c}}$$

V. Statisch unbestimmtes Stabwerk 2



Gegeben: *l*, *EA*, *F*.
Gesucht:
1. Stabkräfte
2. Verschiebungen
Bei F=0 sind alle Stäbe entspannt.

$$\vec{e}_1 = (\cos\alpha, -\sin\alpha)$$

$$\vec{e}_2 = (1,0)$$

$$\vec{e}_3 = (\cos\alpha, \sin\alpha)$$

$$\Delta l_1 = \vec{u} \cdot \vec{e}_1 = \left(u_x, u_y\right) \cdot (\cos\alpha, -\sin\alpha)$$

$$= u_x \cos\alpha - u_y \sin\alpha$$

$$\Delta l_2 = \vec{u} \cdot \vec{e}_2 = \left(u_x, u_y\right) \cdot (1,0) = u_x$$

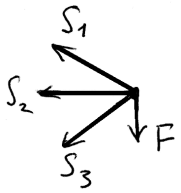
$$\Delta l_3 = \vec{u} \cdot \vec{e}_3 = \left(u_x, u_y\right) \cdot (\cos\alpha, \sin\alpha)$$

$$= u_x \cos\alpha + u_y \sin\alpha$$

$$S_1 = c_1 \Delta l_1 = c_1\left(u_x \cos\alpha - u_y \sin\alpha\right)$$

$$S_2 = c_2 \Delta l_2 = c_2 u_x$$

$$S_3 = c_3 \Delta l_3 = c_3\left(u_x \cos\alpha + u_y \sin\alpha\right)$$



Kräftegleichgewicht:

$$\left.\begin{array}{l} \text{x: } -S_1\cos\alpha - S_2 - S_3\cos\alpha = 0 \\ \text{y: } S_1\sin\alpha - S_3\sin\alpha - F = 0 \end{array}\right\}$$

$$-c_1\left(u_x \cos\alpha - u_y \sin\alpha\right)\cos\alpha - c_2 u_x$$

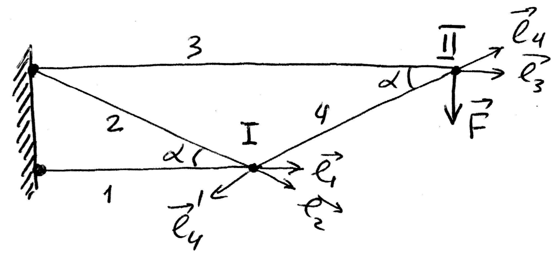
$$-c_3\left(u_x \cos\alpha + u_y \sin\alpha\right)\cos\alpha = 0$$

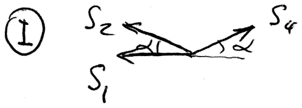
$$c_1\left(u_x \cos\alpha - u_y \sin\alpha\right)\sin\alpha$$

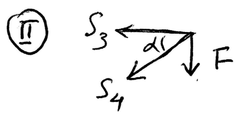
$$-c_3\left(u_x \cos\alpha + u_y \sin\alpha\right)\sin\alpha - F = 0$$

VI. Statisch bestimmtes Stabwerk 3

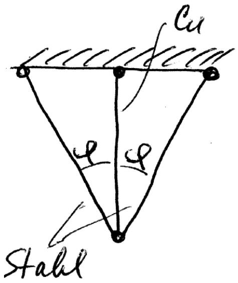
Zu bestimmen sind die Verschiebungen beider Knoten







VII. Statisch unbestimmtes Stabwerk mit Wärmespannungen



$\alpha(Stahl) = 1,2 \cdot 10^{-5} 1/\mathrm{K}$

$\alpha(Cu) = 1,7 \cdot 10^{-5} 1/\mathrm{K}$

$\Delta T = 100\,\mathrm{K}$.

Zu bestimmen sind die thermischen Spannungen.