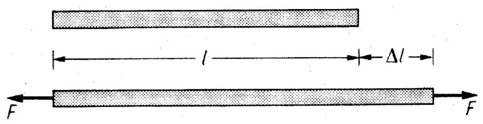
Zug und Druck in Stäben, Hookesches Gesetz

Literatur: *Hauger, Schnell und Groß.* Technische Mechanik 2 (Elastostatik), 1.1-1.3.

I. Das Hookesche Gesetz Ziehen wir an den Enden eines Stabes mit einer Kraft *F*, so nimmt die Länge um einen Betrag Δl zu. Wir werden annehmen, daß die Längenänderung ein kleiner Bruchteil der ursprünglichen Länge ist. Für eine große Anzahl von Materialien zeigen die Experimente, dass bei genügend kleinen Dehnungen die Kraft



proportional zur Verlängerung ist:

$F \propto \Delta l$.

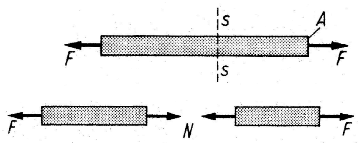
Diese Relation ist als *Hookesches Gesetz* bekannt. Solche Stoffe werden *linear elastisch* genannt.

II. Dehnung Die Verlängerung Δl des Stabes hängt auch von seiner Länge ab. Um eine Größe zu erhalten, die für das Material und nicht für seine Form charakteristisch ist, verwenden wir das Verhältnis $\Delta l / l$ zwischen der Verlängerung und der ursprünglichen Länge. Dieses Verhältnis heißt

Dehnung: $\varepsilon = \Delta l / l$. (Einheit: Dimensionslos)

Die Dehnung ist proportional zur Kraft, aber unabhängig von *l*: $F \propto \varepsilon$.

III. Spannung Bei der gegebenen Dehnung wirkt in jedem Querschnitt des Stabes eine Normalkraft N . Sie hängt u.a. vom Flächeninhalt *A* des Querschnitts des Stabes ab. Die Kraft für eine vorgegebene Verlänge-



rung muss proportional zur Querschnittsfläche *A* des Stabes sein. Die "Beanspruchungsintensität" wird somit nicht durch die Kraft, sondern durch das Verhältnis der Kraft zur Fläche (Spannung) charakterisiert:

Spannung: $\sigma = N / A$
(Einheit: N/m^2=Pascal=[Pa])

Die Spannung hat dieselbe Einheit wie Druck. Zur Orientierung: Atmosphärischer Druck=10^5 Pa , Fließgrenze von Stählen: $\sigma_{fließ} = 200 \div 1000$ MPa , für temperiertes Kupfer ist dagegen ca. $\sigma_{fließ} \approx 1$MPa.

IV. Elastizitätsmodul Der Zusammenhang zwischen der Dehnung und der Spannung hängt weder von der Länge noch vom Querschnitt des Stabes, sondern nur vom Material ab. Er wird durch die lineare Gleichung

$\sigma = E\varepsilon$ (*Hookesches Gesetz*)

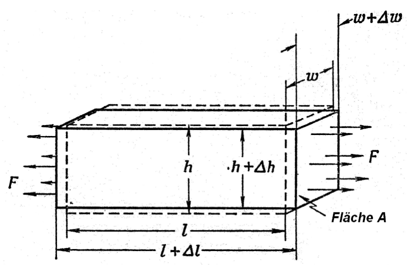
charakterisiert.

E ist der *Elastizitätsmodul.*
(Einheit: N/m^2=Pascal)

Merken Sie sich den Elastizitätsmodul von Stahl:

$E_{Stahl} \approx 210$ GPa$= 2{,}1 \cdot 10^{11}$ Pa.

V. Poisson-Zahl (Querkontraktionszahl)
Betrachten wir einen rechteckigen Block aus einem Material mit der Länge *l*, der Breite *w* und der Höhe *h*. Wird der Block in einer Richtung ge-



dehnt, so zieht er sich rechtwinklig zur Kraft zusammen. Die Kontraktion in der Breite ist proportional zur Breite *w* und zur Dehnung $\Delta l / l$. Die Querkontraktion erfolgt sowohl für die Breite als auch für die Höhe in derselben Proportion und wird gewöhnlich geschrieben als

$$\frac{\Delta w}{w} = \frac{\Delta h}{h} = -\nu \frac{\Delta l}{l}$$

Die Konstante

ν ist *Poissonsche Zahl* oder auch Querkontraktionszahl. (Einheit: Dimensionslos)

Merken Sie sich, daß bei den meisten Metallen die Poisson-Zahl ungefähr gleich 1/3 ist ($\nu = 0.3 - 0.36$). Bei einer Deformation *ohne Volumenänderung* ist $\nu = 1/2$. Für Gummi gilt $\nu \approx 1/2$.

VI. Wärmeausdehnungskoeffizient.
Dehnungen werden nicht nur durch Kräfte, sondern auch durch Temperaturänderungen hervorgerufen. Bei einer kleinen Temperaturänderung ΔT kann man annehmen, dass die Wärmedehnung ε_T proportional zu ΔT ist:

$\varepsilon_T = \alpha_T \Delta T$.

α_T ist *Wärmeausdehnungskoeffizient.* (Einheit: 1/K bzw. $1/{}^\circ C$). [K=Kelvin=1°C]

Der Wärmeausdehnungskoeffizient bei Stählen liegt bei $\alpha_T \approx 1{,}2\cdot 10^{-5}$ 1/°C.

Wird eine Spannung σ angelegt und gleichzeitig Temperatur um ΔT geändert, so werden beide Dehnungen addiert (Superpositionsprinzip): $\boxed{\varepsilon = \dfrac{\sigma}{E} + \alpha_T \Delta T}$.

VII. Dehnsteifigkeit Schreiben wir das Hookesche Gesetz in der Form

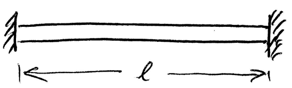
$$\frac{F}{A} = E\frac{\Delta l}{l}.$$

Daraus folgt, daß die Kraft proportional zur Längenänderung ist:

$$\boxed{F = \left(\frac{EA}{l}\right)\Delta l = c\cdot \Delta l}$$

Die Konstante c nennt man die *Steifigkeit* des Stabes: $c = EA/l$.
Das Produkt EA wird *als Dehnsteifigkeit* bezeichnet.

B1. Eine stählerne Stange (Länge $l = 1$ m, Querschnitt $A = 1\text{cm}^2$) wird zwischen zwei starren Wänden geklemmt und um 100°C erwärmt. Zu bestimmen ist die Druckspannung und die Druckkraft in der Stange.



Lösung: Bezeichnen wir die in der Stange wirkende Spannung als σ. Die Dehnung unter der Wirkung dieser Spannung und der Temperaturänderung ist gleich

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \alpha_T \Delta T.$$

Da die Stange sich nicht dehnen kann, ist

$$\varepsilon = 0: \ \frac{\sigma}{E} + \alpha_T \Delta T = 0.$$

Daraus folgt

$\boxed{\sigma = -E\alpha_T \Delta T}$.

Mit $E = 2{,}1\cdot 10^{11}$ Pa und $\alpha_T \approx 1{,}2\cdot 10^{-5}$ 1/K erhalten wir

$$\sigma = -2{,}1\cdot 10^{11}\,\text{Pa}\cdot 1{,}2\cdot 10^{-5}\,\text{K}^{-1}\cdot 100\,\text{K}$$
$$= -2{,}5\cdot 10^{8}\,\text{Pa} = -250\,\text{MPa}$$

Das negative Vorzeichen zeigt, dass es sich um eine *Druck*spannung handelt.
Die Normalkraft ist gleich

$$N = \sigma A = -250\,\text{MPa}\cdot 10^{-4}\,\text{m}^2$$
$$= -2{,}5\cdot 10^{4}\,\text{N} = -25\,\text{kN}$$

B2. An einem Draht (Länge 1m, Querschnitt 1mm^2) hängt ein Gewicht 100kg. Wie groß ist die Dehnung des Drahtes? Kann der Draht diese Last aushalten?
Lösung: Wir benutzen das Hookesche Gesetz in der Form $F = \left(\dfrac{EA}{l}\right)\Delta l$. Daraus folgt

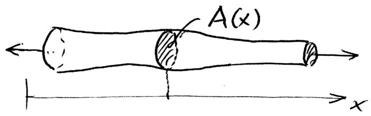
$$\Delta l = \frac{Fl}{EA} = \frac{mgl}{EA} = \frac{100\cdot 9{,}8\cdot 1}{2{,}1\cdot 10^{11}\cdot 1\cdot 10^{-6}}$$
$$= 4{,}7\cdot 10^{-3}\,\text{m} = 4{,}7\,\text{mm}$$

Die Spannung ist

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{mg}{A} = \frac{100\cdot 9{,}8}{10^{-6}} = 980\,\text{MPa}.$$

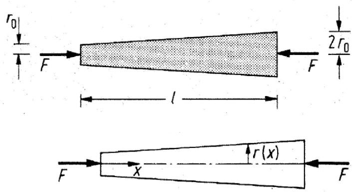
Nur hochfeste Stähle können solche Spannung aushalten. Normalerweise wird sich der Draht plastisch deformieren und reißen.

VIII. Ein Stab mit einem veränderlichen Querschnitt Alle oben gegebene Definitionen sind nur im Fall eines langen, homogenen Stabes gültig. Man kann sie aber auch dann als eine gute Näherung benutzen, wenn der Querschnitt des Stabes nur *schwach veränderlich* ist. In diesem Fall kann man die Normalspannung im Querschnitt mittels der Formel



$\boxed{\sigma(x) = \dfrac{N(x)}{A(x)}}$ bestimmen.

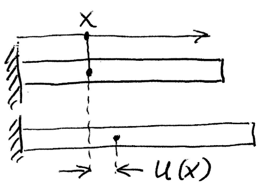
B3. Ein konischer Stab (Länge l) mit kreisförmigem Querschnitt (Endradien r_0 und $2r_0$) wird durch eine Druckkraft F belastet.
Zu bestimmen ist die Normalspannung $\sigma(x)$ im beliebigen Querschnitt.



Lösung: Der Radius als Funktion der Längskoordinate x ist $r(x) = r_0\left(1 + x/l\right)$. Die Querschnittsfläche ist $A(x) = \pi r^2(x)$. Die Normalkraft ist $N = -F$. Die Normalspannung ist:

$$\sigma(x) = \frac{N}{A(x)} = -\frac{F}{\pi r_0^2\left(1 + x/l\right)^2}.$$

IX. Nicht gleichmäßig deformierter Stab.



Einen nicht gleichmäßig deformierten Stab kann man durch die Verschiebung $u(x)$ des Punktes mit der *Anfangskoordinate* x charakterisieren.

Es gilt: $\boxed{\varepsilon = \dfrac{du(x)}{dx}}$.