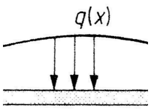
Differentialgleichungen für die Schnittlasten, Integration und Randbedingungen.

Literatur: ***Hauger, Schnell und Groß.*** **Technische Mechanik 1 (Statik), 7.2.2, 7.2.3, 7.2.4, 7.3.**

I. Zusammenhang zwischen Belastung und Schnittgrößen



Wird ein Balken durch eine Streckenlast $q(x)$ belastet, so gilt für die Querkraft $Q(x)$ und für das Biegemoment $M(x)$:

$$\boxed{\frac{dQ(x)}{dx} = -q(x)}, \quad \boxed{\frac{dM(x)}{dx} = Q(x)}. \quad (1)$$

Indem man beide Gleichungen kombiniert, erhält man $\boxed{\dfrac{d^2M(x)}{dx^2} = -q(x)}$. (2)

II. Integration und Randbedingungen

Ist die Belastung $q(x)$ gegeben, so kann man durch Lösung der Differentialgleichungen (1) und (2) die Schnittgrößen berechnen.
Integration von (1) ergibt:

$$Q(x) = -\int q(x)dx + C_1 \quad (3)$$

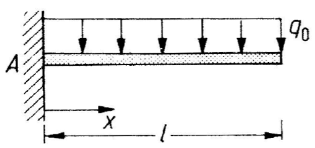
$$M(x) = \int Q(x)dx + C_2 \quad (4)$$

Die zwei *Integrationskonstanten* C_1 und C_2 werden aus den *Randbedingungen* ermittelt.

Lager	Q	M
gelenkiges Lager	$\neq 0$	0
Parallelführung	0	$\neq 0$
Schiebehülse	$\neq 0$	$\neq 0$
Einspannung	$\neq 0$	$\neq 0$
freies Ende	0	0

III. Beispiele

B1. Zu bestimmen sind die Schnittlasten im abgebildeten Balken.



<u>*Lösung:*</u> Aus Gleichung (3) folgt:

$$Q(x) = -\int q_0 dx + C_1 = -q_0 x + C_1. \quad (5)$$

Aus Gleichung (4) folgt:

$$M(x) = \int Q(x)dx + C_2 = \int \left(-q_0 x + C_1\right)dx + C_2$$
$$= -q_0 \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2. \quad (6)$$

Konstanten C_1 und C_2 bestimmen wir aus den Randbedingungen (in diesem Fall am rechten Ende):

$Q(l) = 0$, $M(l) = 0$. Einsetzen $x = l$ in (5) und (6) ergibt:

$$\left.\begin{aligned} Q(l) &= -q_0 l + C_1 = 0 \\ M(l) &= -q_0 \frac{l^2}{2} + C_1 l + C_2 = 0 \end{aligned}\right\}$$

Daraus folgt:

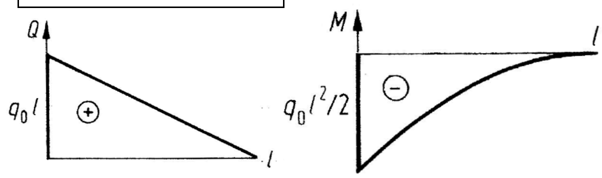
$C_1 = q_0 l$, $C_2 = -\dfrac{q_0 l^2}{2}$.

$$\boxed{Q(x) = -q_0 x + C_1 = -q_0 x + q_0 l = q_0\left(l - x\right)}$$

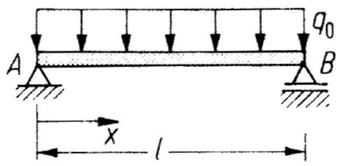
$$M(x) = -q_0 \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2$$

$$= -q_0 \frac{x^2}{2} + q_0 l x - \frac{q_0 l^2}{2} = -\frac{q_0}{2}\left(x^2 - 2lx + l^2\right)$$

$$\boxed{M(x) = -\frac{q_0}{2}\left(l - x\right)^2}.$$



B2. Zu bestimmen sind die Schnittlasten im unten abgebildeten Balken.
<u>*Lösung:*</u> Da die Last dieselbe ist wie im vorigen Beispiel, sind auch die Differentialgleichungen und ihre Lösungen dieselben (5) und (6). Der einzige Unterschied lieg in den Randbedingungen:



$M(0) = 0$,
$M(l) = 0$ (wegen gelenkiger Lagerung). Einsetzen $x = 0$ und $x = l$ in (6) ergibt:

$M(0) = C_2 = 0$,

$$M(l) = -q_0 \frac{l^2}{2} + C_1 l + C_2 = 0.$$

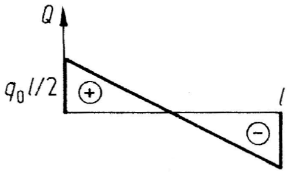
Aus der zweiten Gleichung folgt: $C_1 = q_0 \dfrac{l}{2}$.

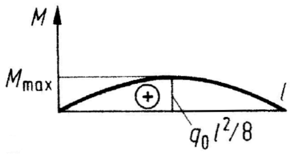
Der Verlauf der Schnittlasten ist somit

$$\boxed{Q(x) = -q_0 x + q_0 \frac{l}{2} = q_0\left(\frac{l}{2} - x\right)},$$

$$M(x) = -q_0 \frac{x^2}{2} + q_0 \frac{l}{2} x \Rightarrow$$

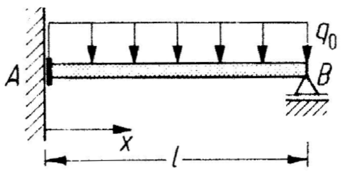
$$\boxed{M(x) = \frac{q_0}{2} x\left(-x + l\right)}.$$





B3. Zu bestimmen sind die Schnittlasten im unten abgebildeten Balken.

Lösung: Da die Last dieselbe ist wie im ersten Bsp., sind auch die Differentialgleichungen und ihre Lösungen dieselben (5) und (6). Der Unterschied liegt in den Randbedingungen:



$Q(0)=0$, $M(l)=0$.

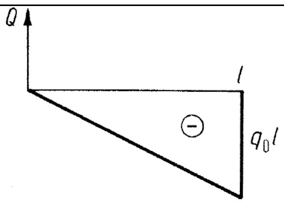
Einsetzen von $x=0$ in (5) und $x=l$ in (6) ergibt: $Q(0)=C_1=0$ und

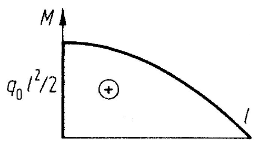
$$M(l)=-q_0\frac{l^2}{2}+C_2=0 \Rightarrow \; C_2=q_0\frac{l^2}{2}.$$

Der Verlauf der Schnittlasten ist somit

$$\boxed{Q(x)=-q_0x+C_1=-q_0x},$$

$$\boxed{M(x)=-q_0\frac{x^2}{2}+C_2=q_0\frac{l^2}{2}-q_0\frac{x^2}{2}=\frac{q_0}{2}\left(l^2-x^2\right)}.$$





IV. Schnittlasten und Lagerreaktionen

Die Schnittlasten am linken Balkenende sind gleich den Lagerreaktionen:

$A=Q(0)$, $\quad M^{(A)}=M(0)$.

Die Schnittlasten am rechten Balkenende sind gleich den Lagerreaktionen mit dem entgegengesetzten Vorzeichen:

$B=-Q(l)$, $M^{(B)}=-M(l)$

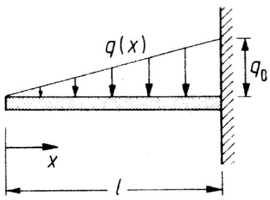
In den oben behandelten drei Aufgaben erhält man:

B1: $A=Q(0)=C_1=q_0l$, $M^{(A)}=-\frac{q_0}{2}l^2$.

B2: $A=Q(0)=q_0\frac{l}{2}$, $B=-Q(l)=q_0\frac{l}{2}$.

B3: $M^{(A)}=M(0)=\frac{q_0}{2}l^2$, $\quad B=-Q(l)=q_0l$.

B4. Der einseitig eingespannte Balken trägt eine von einem Ende zum anderen linear steigende Streckenlast. Zu bestimmen sind die Schnittgrößen.



Lösung: Die Streckenlast wird offenbar durch die Gleichung $q(x)=q_0x/l$ gegeben. Aus der Gleichung (3) folgt:

$$Q(x)=-\int q(x)dx+C_1=-\left(q_0/l\right)\int xdx+C_1$$

$$\boxed{Q(x)=-q_0\frac{x^2}{2l}+C_1} \qquad (5)$$

Aus der Gleichung (4) folgt:

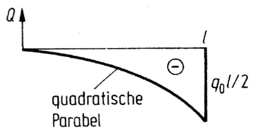
$$M(x)=\int Q(x)dx+C_2=\int\left(-q_0\frac{x^2}{2l}+C_1\right)dx+C_2$$

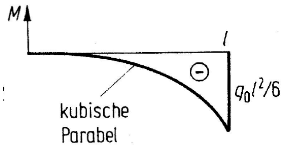
$$\boxed{M(x)=-q_0\frac{x^3}{6l}+C_1x+C_2}. \qquad (6)$$

Aus den Randbedingungen $Q(0)=0$, $M(0)=0$ folgt: $C_1=0$, $C_2=0$.

Der Verlauf der Schnittlasten:

$$\boxed{Q(x)=-q_0\frac{x^2}{2l}}, \boxed{M(x)=-q_0\frac{x^3}{6l}}.$$



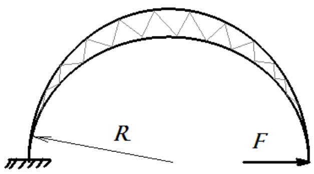


Lagerreaktionen:

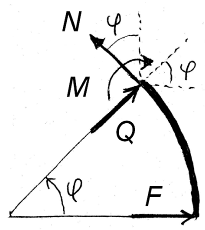
$$B=-Q(l)=\frac{q_0l}{2}, \qquad M^{(B)}=-M(l)=q_0\frac{l^2}{6}$$

V. Bogen

Der Kreisbogenträger wird durch eine Einzelkraft belastet. Gesucht sind die Schnittlasten.



Lösung: Wir schneiden einen Teil des Bogens bis zum Winkel φ frei. Gleichgewichtsbedingungen:



$$\left.\begin{array}{l} x: \\ -N\sin\varphi+Q\cos\varphi+F=0 \\ y:\ N\cos\varphi+Q\sin\varphi=0 \\ M^{(\varphi)}: \\ -M(\varphi)+FR\sin\varphi=0 \end{array}\right\}$$

Daraus folgt:

$$\boxed{M(\varphi)=FR\sin\varphi}, \boxed{Q(\varphi)=-F\cos\varphi}, \boxed{N(\varphi)=F\sin\varphi}.$$

B5. Erklären Sie, warum die Dachträger am Bahnhof Alexanderplatz in der Mitte dicker sind, als an den gelenkig gelagerten Enden (Bild links).