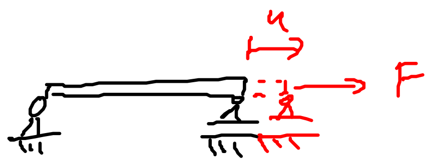
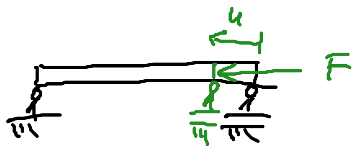
27. Vorlesung : Knickung & Euler-Knickfälle

i)

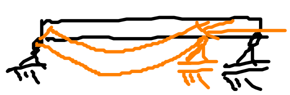


Zusammenhang zwischen Kraft & Verformung ist eindeutig ⇒ FS im unverformten Zustand

ii)



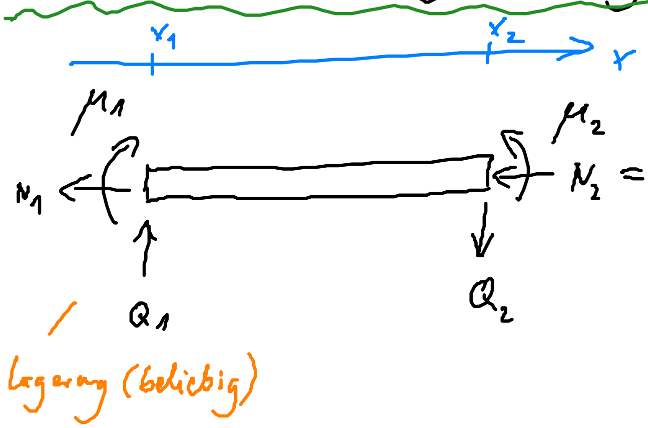
Zusammenhang ist nicht mehr eindeutig ⇒ FS im verformten Zustand



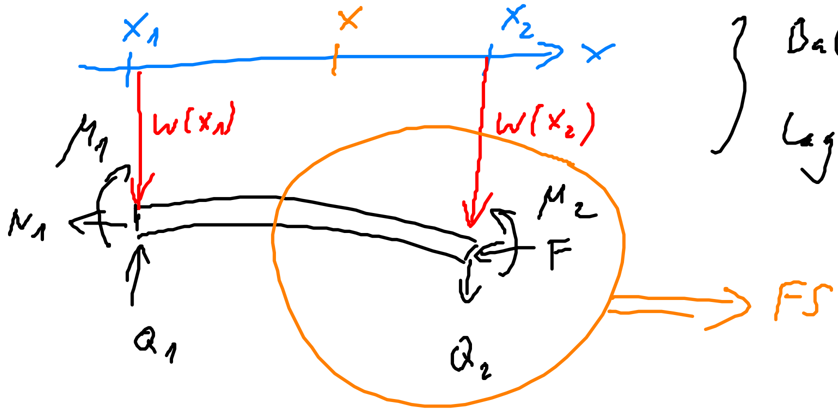
$F \geq F_{krit}$

Ziel:
1.) Wann tritt Knicken auf ⇒ F_{krit}
2.) Wie knickt der Stab ⇒ $w(x)$

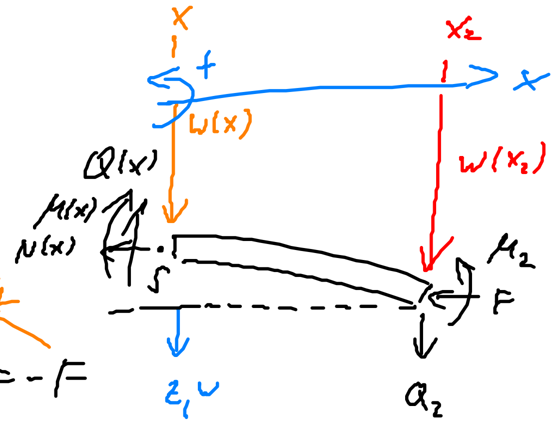
I. Eulersche Knickungsgleichung – Herleitung



Balken mit beliebiger Lagerung



Balken mit beliebiger Lagerung & Auslenkung



äußere Druckkraft

Stück ist in Ruhe: GGB:

$$\sum F_x \overset{!}{=} 0, \quad 0 = -F - N(x) \Rightarrow N(x) = -F$$

$$\sum F_z \overset{!}{=} 0, \quad 0 = Q_2 - Q(x) \Rightarrow Q(x) = Q_2$$

$$\sum M^{(S)} \overset{!}{=} 0, \quad 0 = -M(x) - Q_2(x_2 - x) - F\big(w(x_2) - w(x)\big) + M_2$$

$$M(x) = -Q_2(x_2 - x) - \underline{F(w(x_2) - w(x))} + M_2$$

Verformung spielt eine Rolle

$$M(x) = -EI\,w''(x)$$

$$\Rightarrow \quad -EI\,w''(x) = -\underbrace{Q_2}_{\text{konst.}}(\underbrace{x_2}_{\text{konst}} - x) - F\big(w(x_2) - w(x)\big) + M_2 \quad \Big| \frac{d}{dx}(\dots)$$

$$-\big(EI\,w''(x)\big)' = -0(x_2 - x) - Q_2(\cdot(-1)) - 0\big(w(x_2) - w(x)\big) - F\big(0 - w'(x)\big)$$

$$\big(-EI\,w''(x)\big)' = Q_2 + F\,w'(x) \quad \Big| \frac{d}{dx}(\dots)$$

$$\boxed{\big(EI\,w''(x)\big)'' = -F\,w''(x)}$$ – EULER-Gleichung für Knickung!

$\Rightarrow$ Lösung liefert: $\hat{w}(x)$, F damit Knicken auftritt

Allgemeine Lösung: $EI = \text{konst.}$

$$EI\, w^{IV} = -F\, w'' \quad \Big|: EI \implies \quad w^{IV} = -\cancel{\frac{F}{EI}}\, w''$$

$$\lambda^2 = \frac{F}{EI}$$

$$\boxed{w^{IV} = -\lambda^2 w''}$$

allg. Lösung der DGL: $$\boxed{w(x) = A\cos(\lambda x) + B\sin(\lambda x) + Cx + D}$$

$$w'(x) = -\lambda A\sin(\lambda x) + \lambda B\cos(\lambda x) + C$$

Alle Ableitungen möglich

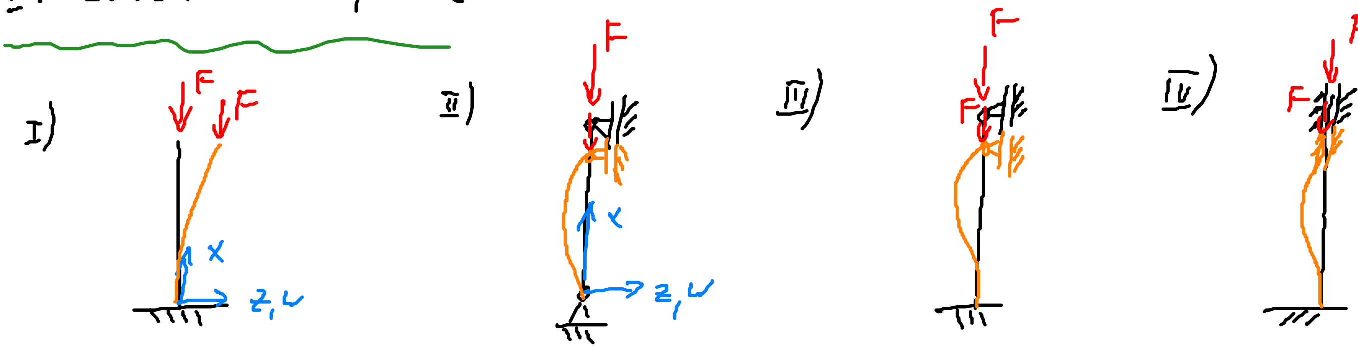
$$w''(x) = -\lambda^2 A\cos(\lambda x) - \lambda^2 B\sin(\lambda x)$$

$$w'''(x) = \lambda^3 A\sin(\lambda x) - \lambda^3 B\cos(\lambda x)$$

$$w^{IV}(x) = \lambda^4 A\cos(\lambda x) + \lambda^4 B\sin(\lambda x) = -\lambda^2 w''(x)$$

w(x) erfüllt DGL!

II. EULER-Knickfälle:



II) RBen: $w(0) = 0$ (1) $\quad M(0) = 0 \implies \cancel{-EI}\, w''(0) = 0$ (3)

$w(l) = 0$ (2) $\quad M(l) = 0 \implies \cancel{-EI}\, w''(l) = 0$ (4)

$$w(x) = A\cos(\lambda x) + B\sin(\lambda x) + Cx + D$$

$$w''(x) = -\lambda^2 A\cos(\lambda x) - \lambda^2 B\sin(\lambda x)$$

$$(1):\ 0 = A\cos(0) + B\sin(0) + C\cdot 0 + D = A + D \implies D = -A$$

$(3): \; 0 = -\lambda^2 A \Rightarrow A = 0$ $\qquad D = 0$

$(2): \; 0 = B\sin(\lambda L) + CL$

$(4): \; 0 = -\underbrace{\cancel{\lambda^2}}_{\neq 0} B\sin(\lambda L)$

$\left.\right\} \; 0 = \cancel{B\sin(\lambda L) - B\sin(\lambda L)} + CL \Rightarrow C = 0$

$$\lambda^2 = \frac{F}{EI}$$

$(4): \; \underbrace{\cancel{B}}_{\neq 0} \sin(\lambda L) = 0$

$\neq 0$ ($B = 0$ wäre die triviale Lösung)

$$\boxed{\sin(\lambda L) = 0}$$

Bestimmungsgleichung für λ, muss erfüllt für Knicken!

$$\lambda L = \arcsin(0) = n\pi, \quad n = \cancel{0}, 1, 2, \ldots$$

$$\lambda^2 = \frac{F}{EI} \Rightarrow \lambda_n = \frac{n\pi}{L}, \quad \lambda_n^2 = \frac{n^2\pi^2}{L^2} \Rightarrow F_n = EI\,\frac{n^2\pi^2}{L^2}$$

technisch relevant: kleinste Last für die Knicken auftritt $\Rightarrow n = 1$

$$F_{krit}^{\mathrm{II}} = EI\left(\frac{\pi}{L}\right)^2, \qquad w(x) = B\sin(\lambda x) = B\sin\left(\frac{\pi}{L}x\right)$$

$\Rightarrow$ kritische Last aus dem kleinsten $\lambda_n \neq 0$

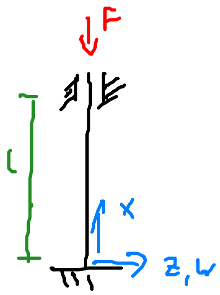
Vorgehen bei Knickaufgaben

- DGL: $\quad EIw^{IV} = -Fw'' \Rightarrow w^{IV} = -\lambda^2 w''$
- Lösung: $\quad w(x) = A\cos(\lambda x) + B\sin(\lambda x) + Cx + D$ (allg.)
- RBen: $\quad$ 4 Stück
- Lösen: 1) λ bestimmen

2) F_{krit} aus Kenntnis $\lambda \neq 0$

3) $w(x)$ bis auf Konstante (Eigenform)

IV:



RBen:

$w(0) = 0 \quad (1)$

$w'(0) = 0 \quad (2)$

$w(l) = 0 \quad (3)$

$w'(l) = 0 \quad (4)$

$$w(x) = A\cos(\lambda x) + B\sin(\lambda x) + Cx + D$$

$$w'(x) = -\lambda A\sin(\lambda x) + \lambda B\cos(\lambda x) + C$$

$$(1): \; 0 = A + D \;\Rightarrow\; D = -A$$

$$(2): \; 0 = \lambda B + C \;\Rightarrow\; C = -\lambda B$$

$$(3): \; 0 = A\cos(\lambda l) + B\sin(\lambda l) + Cl + D = A\left(\cos(\lambda l) - 1\right) + B\left(\sin(\lambda l) - \lambda l\right)$$

$$(4): \; 0 = -\lambda A\sin(\lambda l) + \lambda B\cos(\lambda l) + C = A\left(-\lambda\sin(\lambda l)\right) + B\left(\lambda\cos(\lambda l) - \lambda\right)$$

mit Koeffizientenmatrix:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \cos(\lambda l) - 1 & \sin(\lambda l) - \lambda l \\ -\lambda\sin(\lambda l) & \lambda\cos(\lambda l) - \lambda \end{bmatrix}}_{\underline{K}} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \vec{0} \qquad A, B \neq 0$$

$\underline{K}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ hat nur dann nicht-triviale Lösungen, wenn $\det(\underline{K}) \overset{!}{=} 0$

$$\det(\underline{K}) = (\cos(\lambda l) - 1)(\lambda\cos(\lambda l) - \lambda) - (\sin(\lambda l) - \lambda l)(-\lambda\sin(\lambda l)) \overset{!}{=} 0$$

... mit Additionstheorem:

$$\boxed{\sin\left(\frac{\lambda L}{2}\right)\left(4\sin\left(\frac{\lambda L}{2}\right)-2\lambda L\cos\left(\frac{\lambda L}{2}\right)\right)=0}$$

Bestimmungsgleichung für λ („Eigenwertgleichung")

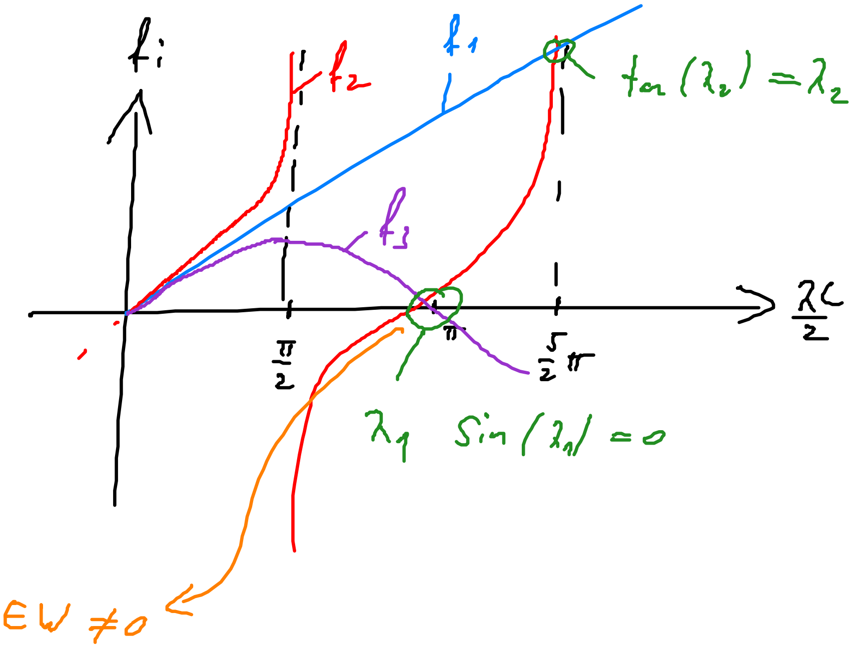
ist erfüllt wenn:

$$\sin\left(\frac{\lambda L}{2}\right)=0 \quad (1) \qquad - f_3$$

$$4\sin\left(\frac{\lambda L}{2}\right)-2\lambda L\cos\left(\frac{\lambda L}{2}\right)=0$$

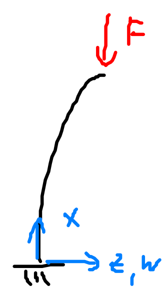
$$\tan\left(\frac{\lambda L}{2}\right)=\frac{\lambda L}{2} \quad (2)$$

f_2 $\qquad$ f_1



$$\frac{\lambda_1 L}{2}=\pi \Rightarrow \lambda_1=\frac{2\pi}{L} \rightarrow F_{krit}^{IV}=EI\lambda_1^2=EI4\left(\frac{\pi}{L}\right)^2$$

I.



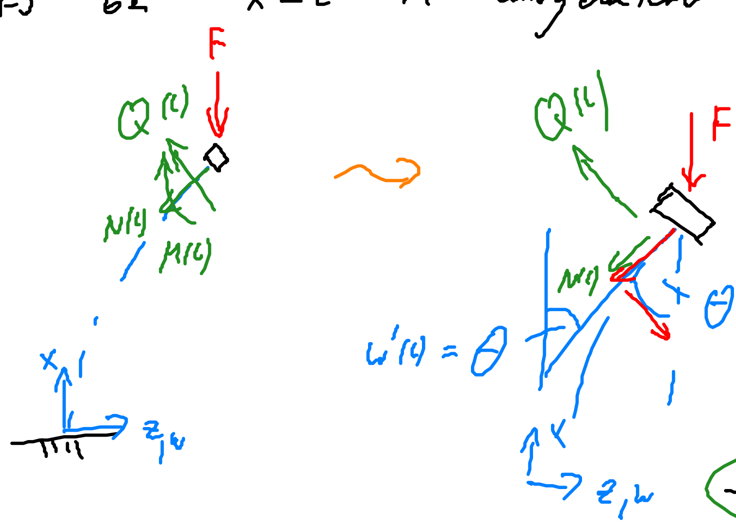
RBen:

$w(0)=0 \quad (1)$

$w'(0)=0 \quad (2)$

$M(L)=0 \Rightarrow -EIw''(L)=0 \quad (3)$

(4): FS bei $x=L$ in ausgelenkter Lage!



$$\Sigma F_Q \stackrel{!}{=} 0, \; 0 = Q(L) - F\sin(\theta)$$

$$Q(L) = F\sin(\theta) \approx F\theta$$

$$Q(L) = Fw'(L)$$

$$-EIw'''(L) = Fw'(L) \quad (4)$$

$$\Longrightarrow \quad F_{krit}^{I} = \frac{EI}{4}\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \quad , \quad F_{krit}^{III} = (1{,}43)^2\, EI \left(\frac{\pi}{L}\right)^2$$

Wir erkennen: $F_{krit}^{I} < F_{krit}^{II} < F_{krit}^{III} < F_{krit}^{IV}$