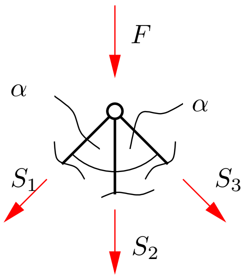
Tutorium

Aufgabe 84

(a) Das System ist statisch unbestimmt. Es existieren 3 unbekannte Stabkräfte aber nur 2 Gleichgewichtsbedingungen, da alle Kräfte denselben Angriffspunkt besitzen (Zentrale Kräftegruppe).

Zur Bestimmung der Stabkräfte benötigen wir zusätzlich die Verformungen!

Freischnitt des unverformten Systems:



Der Winkel $\alpha = 45°$ besteht sowohl zwischen Stab1 und Stab2 als auch zwischen Stab2 und Stab3.

Gleichgewichtsbedingungen am unverformten System:

$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad S_1 = S_3 \tag{1}$$

$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad -2S_1 \cos\alpha - S_2 - F = 0 \tag{2}$$

Modifizierte Materialgesetze:
(das folgende gilt nur bei verschwindener Streckenlast $q_0(x) = 0$)

$$S_i = E_i A_i \frac{\Delta l_i}{l_i} \tag{3}$$

Die Stäbe besitzen denselben E-modul; Stab2 hat jedoch eine doppelt so große Querschnittsfläche, wie die anderen beiden. Die Längen der Stäbe in der unverformten Lage sind

$$l_1 = l_3 = \sqrt{2}l; \quad l_2 = l; \tag{4}$$

Geometrisch linearisierte Verformungskinematik:

$$\underline{u}_A = -u_y \underline{e}_y \tag{5}$$

Die Längenänderungen der Stäbe sind

$$\Delta l_1 = \underline{e}_1 \cdot \underline{u}_A = \frac{1}{\sqrt{2}}(\underline{e}_x + \underline{e}_y) \cdot (-u_y)\underline{e}_y = \frac{-u_y}{\sqrt{2}} \tag{6}$$

$$\Delta l_2 = \underline{e}_2 \cdot \underline{u}_A = \underline{e}_y \cdot (-u_y)\underline{e}_y = -u_y \tag{7}$$

$$\Delta l_3 = \underline{e}_3 \cdot \underline{u}_A = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\underline{e}_x + \underline{e}_y) \cdot (-u_y)\underline{e}_y = \frac{-u_y}{\sqrt{2}} \tag{8}$$

Einsetzen von (6), (7) und (8) in (3) liefert

$$S_1 = -\frac{EA}{2l} u_y = S_3 \tag{9}$$

$$S_2 = -\frac{2EA}{l} u_y \tag{10}$$

Ein Vergleich von (9) und (10) ergibt

$$S_2 = 4S_1 \tag{11}$$

Einsetzen der Gleichung (11) in (2) führt zu

$$-2S_1 \frac{1}{\sqrt{2}} - 4S_1 = F \Rightarrow \underline{\underline{S_1 = S_3 = \frac{-F}{4+\sqrt{2}}}} \tag{12}$$

sowie (12) in (11)

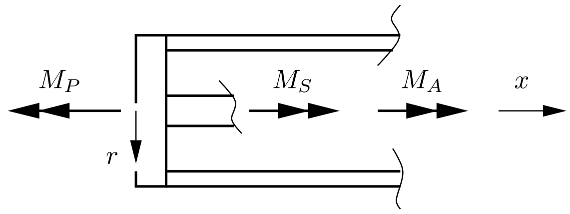
$$\Rightarrow \underline{\underline{S_2 = \frac{-4F}{4+\sqrt{2}}}} \tag{13}$$

(b) Die Verschiebung erhält man nun z.B. durch Einsetzen von (12) in (9) und Umformung

$$\Rightarrow \underline{\underline{u_y = \frac{Fl}{EA(\frac{1}{\sqrt{2}} + 2)}}} \tag{14}$$

Aufgabe 97

Freischnitt und Gleichgewichtsbedingungen:



$$\sum M = 0 \quad \Rightarrow \quad M_P = M_S + M_A \tag{15}$$

M_P ... an der Platte angreifendes äußeres Moment
M_S ... Schnittmoment in der Stahlwelle
M_A ... Schnittmoment in der Alu-Hohlwelle

Geometrie: Durch die Verbindung mit der starren Platte müssen der Verdrehwinkel der Stahlwelle ϑ_S und der Verdrehwinkel der Aluwelle ϑ_A gleich sein (ϑ_p = Verdrehwinkel der Platte gegen die Einspannung):

$$\vartheta_A = \vartheta_S = \vartheta_p \tag{16}$$

Materialgesetz:

$$M = GI_t \frac{d\vartheta}{dx} \tag{17}$$

mit $I_t = I_p$ bei Kreisquerschnitten und $I_p = \int r^2 dA$, hier also für die Vollwelle:

$$I_{t,S} = \int_0^{\frac{d}{2}} r^2\, 2\pi r\, dr = \frac{\pi}{32} d^4 \tag{18}$$

und für die Hohlwelle

$$I_{t,A} = \int_{\frac{d_i}{2}}^{\frac{d_a}{2}} r^2\, 2\pi r dr = \frac{\pi}{32}\left(d_a^4 - d_i^4\right) \tag{19}$$

Integration von (17) über die gesammte Länge l (für den Fall, dass M, G und I_t über l konstant sind, also homogene Torsion vorliegt):

$$Ml = GI_t\vartheta \tag{20}$$

(16) und (20) eingesetzt in (15) ergibt:

$$M_p = \left(G_S I_{t,S} + G_A I_{t,A}\right)\frac{\vartheta_p}{l} \tag{21}$$

Schubwinkel/Drillung: $\gamma = r\,\frac{\partial\vartheta}{\partial x}$,
Hookesches Gesetz: $\tau = G\,\gamma$

$$\tau(r) = G\,\frac{\partial\vartheta}{\partial x}\, r \tag{22}$$

Offenbar tritt die größte Spannung jeweils am Außenrand der Welle auf. Mit $\frac{\partial\vartheta}{\partial x} = \frac{\vartheta_p}{l}$ (homogene Torsion) ergibt sich:

$$\tau_{\max} = G\,\frac{\vartheta_p}{l}\, r_{\text{außen}} \;\Leftrightarrow\; \frac{\vartheta_p}{l} = \frac{\tau_{\max}}{G\, r_{\text{außen}}} \tag{23}$$

Das Moment, bei dem am Außenrand der Stahlwelle die zulässige Schubspannung für Stahl τ_S herrscht, ergibt sich aus (23) mit (21):

$$M_{p,S} = \left(G_S\, I_{t,S} + G_A\, I_{t,A}\right)\frac{\tau_S}{G_S\,\frac{d}{2}} \tag{24}$$

Das Moment, bei dem am Außenrand der Aluwelle die zulässige Schubspanung für Aluminium τ_A herrscht, lautet analog:

$$M_{p,A} = \left(G_S\, I_{t,S} + G_A\, I_{t,A}\right)\frac{\tau_A}{G_A\,\frac{d_a}{2}} \tag{25}$$

Mit den Zahlenwerten ergibt sich:

$$I_{t,S} = 6{,}14 \cdot 10^{-7}\text{m}^4 \tag{26}$$
$$I_{t,A} = 2{,}00 \cdot 10^{-6}\text{m}^4 \tag{27}$$
$$M_{p,S} = 6190 \text{ N m} \tag{28}$$
$$M_{p,A} = 7039 \text{ N m} \tag{29}$$

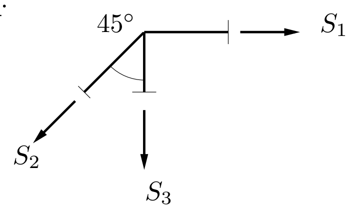
Bei einem Drehmoment größer als 6190 N m wird die zulässige Spannung in der Stahlwelle überschritten. Das maximal zulässige Drehmoment beträgt also:

$$\underline{M_{\text{zul}} = 6190\,\text{N m}} \tag{30}$$

Hausaufgaben

Aufgabe 86

Gleichgewicht:



$$\sum H = 0 \Rightarrow S_1 = S_2 \frac{\sqrt{2}}{2} \tag{31}$$
$$\sum V = 0 \Rightarrow S_3 = -S_2 \frac{\sqrt{2}}{2} \tag{32}$$

Material-Struktur-Gleichung:

$$\varepsilon_1 = \frac{\Delta l_1}{l_1} = \frac{S_1}{EA} + \alpha \Delta T \tag{33}$$
$$\varepsilon_2 = \frac{\Delta l_2}{l_2} = \frac{S_2}{EA} \tag{34}$$
$$\varepsilon_3 = \frac{\Delta l_3}{l_3} = \frac{S_3}{EA} \tag{35}$$

Mit den Gleichgewichtsbedingungen und den Material-Struktur-Gleichungen für die 3 Stäbe haben wir zusammen 5 Gleichungen für die 6 Unbekannten: $S_1, S_2, S_3, \Delta l_1, \Delta l_2$ und Δl_3. Die fehlende Gleichung ist eine kinematische Beziehung zwischen den Längenänderungen aller Stäbe.

Kinematik:

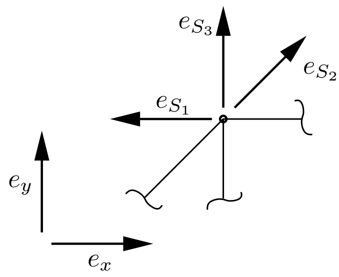
Die linearisierte Verlängerung des Stabs berechnet sich mit der Formel

$$\Delta l = \underline{u} \cdot \underline{e}_S \tag{36}$$

Der Verschiebungsvektor $\underline{u}$ hat die Komponenten u_x und u_y:

$$\underline{u} = u_x \underline{e}_x + u_y \underline{e}_y = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} \tag{37}$$

In der vorliegenden Aufgabe wird die Formel (36) für alle drei Stäbe benutzt:



$$\underline{e}_{S_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \Delta l_1 = \underline{u} \cdot \underline{e}_{S1} = -u_x \tag{38}$$
$$\underline{e}_{S_2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \Delta l_2 = \underline{u} \cdot \underline{e}_{S2} = \frac{\sqrt{2}}{2} (u_x + u_y) \tag{39}$$
$$\underline{e}_{S_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \Delta l_3 = \underline{u} \cdot \underline{e}_{S3} = u_y \tag{40}$$

Wir eliminieren mit den Gleichgewichtsbeziehungen (31) und (32) zunächst in den Material-Struktur-Gleichungen (33)–(35) S_1 und S_3 (mit $l_1 = l_3 = b$ und $l_2 = \sqrt{2}b$):

$$\Delta l_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{S_2 b}{EA} + \alpha \Delta T b \tag{41}$$
$$\Delta l_2 = \sqrt{2} \frac{S_2 b}{EA} \tag{42}$$
$$\Delta l_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \frac{S_2 b}{EA} \tag{43}$$

Nun wird auch noch S_2 eliminiert:

$$\Delta l_1 + \Delta l_3 = \alpha \Delta T b \tag{44}$$
$$\Delta l_2 + 2\Delta l_3 = 0 \tag{45}$$

Einsetzen der Beziehungen für die Verschiebung des Knotens P (38), (39) und (40):

$$-u_x + u_y = \alpha \Delta T b \tag{46}$$
$$u_x + (1 + 2\sqrt{2}) u_y = 0 \tag{47}$$

Somit folgt für die Verschiebung des Punktes A

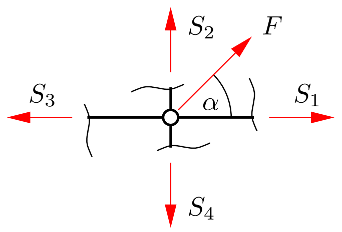
$$u_x = -\frac{2\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}+2} \alpha \, \Delta T \, b \tag{48}$$
$$u_y = \frac{\alpha \, \Delta T \, b}{2\sqrt{2}+2} \tag{49}$$

Das ist eine Verschiebung nach links oben.

Aufgabe 88

Das System ist statisch unbestimmt, d.h. die Gleichgewichtsbedingungen allein reichen nicht aus, um die Stabkräfte zu berechnen.

Freischnitt des unverformten Systems:



Gleichgewichtsbedingungen am unverformten System:

$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad S_1 - S_3 + F \cos\alpha = 0 \tag{50}$$
$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad S_2 - S_4 + F \sin\alpha = 0 \tag{51}$$

Modifizierte Materialgesetze:

$$S_i = EA \frac{\Delta l_i}{l_i} \tag{52}$$

Die Querschnittsfläche aller Stäbe ist

$$A = D^2 \tag{53}$$

Die Längen der Stäbe in der unverformten Lage sind

$$l_1 = b; \qquad l_2 = d; \tag{54}$$
$$l_3 = a; \qquad l_4 = c; \tag{55}$$

Geometrisch linearisierte Verformungskinematik:

Die Längenänderungen der Stäbe werden durch Projektionen des Verschiebungsvektors $\underline{u}_P$ auf die Stabrichtungen der unverformten Lage gebildet. Die Stabeinheitsvektoren weisen dabei stets entlang der Stäbe zum Punkt hin, welcher sich verschiebt. Der Verschiebungsvektor $\underline{u}_P$ setzt sich bei Zugrundelegung einer kartesischen Basis, deren Basisvektoren in Richtung der positiven Koordinatenrichtungen zeigen, wie folgt zusammen:

$$\underline{u}_P = u_x \underline{e}_x + u_y \underline{e}_y \tag{56}$$

Die Längenänderungen der Stäbe sind

$$\Delta l_1 = \underline{e}_1 \cdot \underline{u}_P = -\underline{e}_x \cdot \underline{u}_P = -u_x \tag{57}$$
$$\Delta l_2 = \underline{e}_2 \cdot \underline{u}_P = -\underline{e}_y \cdot \underline{u}_P = -u_y \tag{58}$$
$$\Delta l_3 = \underline{e}_3 \cdot \underline{u}_P = \underline{e}_x \cdot \underline{u}_P = u_x \tag{59}$$
$$\Delta l_4 = \underline{e}_4 \cdot \underline{u}_P = \underline{e}_y \cdot \underline{u}_P = u_y \tag{60}$$
$$\Rightarrow \quad \Delta l_1 = -\Delta l_3 = -u_x \tag{61}$$
$$\Rightarrow \quad \Delta l_2 = -\Delta l_4 = -u_y \tag{62}$$

Einsetzen in (52) liefert

$$S_1 = -\frac{EA}{b} u_x; \qquad S_3 = \frac{EA}{a} u_x; \tag{63}$$
$$S_2 = -\frac{EA}{d} u_y; \qquad S_4 = \frac{EA}{c} u_y; \tag{64}$$

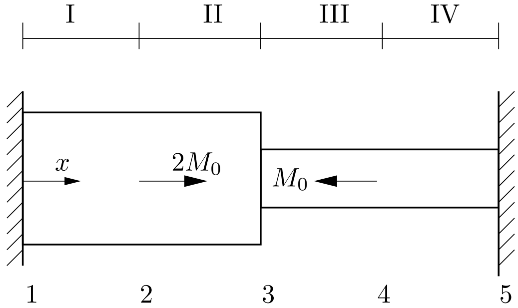
Einsetzen der Gleichungen (63) in (50)

$$-EA(\frac{1}{b} + \frac{1}{a}) u_x + F\cos\alpha = 0 \Rightarrow \underline{\underline{u_x = \frac{F\cos\alpha}{EA(\frac{1}{a} + \frac{1}{b})}}} \tag{65}$$

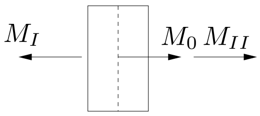
Einsetzen der Gleichungen (64) in (51)

$$-EA(\frac{1}{c} + \frac{1}{d}) u_y + F\sin\alpha = 0 \Rightarrow \underline{\underline{u_y = \frac{F\sin\alpha}{EA(\frac{1}{c} + \frac{1}{d})}}} \tag{66}$$

Aufgabe 98

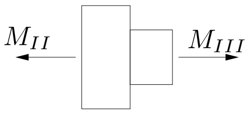


Freischneiden und Gleichgewicht an der Stelle 2:



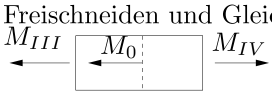
$$0 = 2M_0 + M_{II} - M_I \tag{67}$$

Freischneiden und Gleichgewicht an der Stelle 3:



$$0 = M_{III} - M_{II} \tag{68}$$

Freischneiden und Gleichgewicht an der Stelle 4:



$$0 = M_{IV} - M_{III} - M_0 \tag{69}$$

Daraus folgt:

$$M_{II} = M_I - 2M_0 \tag{70}$$
$$M_{III} = M_I - 2M_0 \tag{71}$$
$$M_{IV} = M_I - M_0 \tag{72}$$

Die Momente sind noch nicht genau bestimmt. M_I ist noch unbekannt. Deshalb werden nun die Verdrehwinkel der einzelnen Bereiche genauer betrachtet.

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{M(x)}{GI_t(x)} \tag{73}$$

Integration der Gl. (73) in den vier Abschnitten: (bei Kreisquerschnitten: $I_t = I_p$)

$$\text{von 1 nach 2}: \qquad \varphi_2 - \varphi_1 = \frac{M_I}{GI_{p1}} a \tag{74}$$
$$\text{von 2 nach 3}: \qquad \varphi_3 - \varphi_2 = \frac{M_{II}}{GI_{p1}} a \tag{75}$$
$$\text{von 3 nach 4}: \qquad \varphi_4 - \varphi_3 = \frac{M_{III}}{GI_{p2}} a \tag{76}$$
$$\text{von 4 nach 5}: \qquad \varphi_5 - \varphi_4 = \frac{M_{IV}}{GI_{p2}} a \tag{77}$$

Randbedingungen:

$$\varphi_1 = 0\,, \qquad \varphi_5 = 0 \tag{78}$$

Auflösen:

$$\text{(78) in (74)}: \qquad \varphi_2 = \frac{M_I}{GI_{p1}} a \tag{79}$$
$$\text{mit (78) und (70) in (75)}: \qquad \varphi_3 = \frac{2a}{GI_{p1}} (M_I - M_0) \tag{80}$$
$$\text{(78) mit (72) in (77)}: \qquad \varphi_4 = -\frac{M_I - M_0}{GI_{p2}} a \tag{81}$$

Aus (76) mit (80), (81) und (71) folgt:

$$-\frac{M_I - M_0}{GI_{p2}}a - \frac{2a}{GI_{p1}}(M_I - M_0) = \frac{M_I - 2M_0}{GI_{p2}}a \tag{82}$$

umgeformt:

$$\frac{-M_I + M_0}{I_{p2}} - \frac{2(M_I - M_0)}{I_{p1}} = \frac{M_I - 2M_0}{I_{p2}} \tag{83}$$

mit $\eta = \frac{I_{p1}}{I_{p2}}$ folgt:

$$(-M_I + M_0)\eta + 2M_0 - 2M_I = (M_I - 2M_0)\eta \tag{84}$$

Daraus folgt für die einzelnen Momente:

$$M_I = M_0\frac{3\eta + 2}{2(1+\eta)} \tag{85}$$

$$M_{II} = -\frac{2+\eta}{2(1+\eta)}M_0 \tag{86}$$

$$M_{III} = M_{II} \tag{87}$$

$$M_{IV} = M_0\frac{\eta}{2(1+\eta)} \tag{88}$$

Nun sind die Momente alle bestimmt und untereinander vergleichbar.
$\tau_{\max}$ kann nun für die 4 Bereiche ausgewertet werden.

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{I_p}\frac{d}{2} \tag{89}$$

Mit

$$\xi = \frac{d_1}{d_2} \qquad \Rightarrow \frac{I_{p1}}{I_{p2}} = \frac{d_1^4}{d_2^4} = \xi^4 = \eta \tag{90}$$

erhält man in den einzelnen Bereichen folgende Beträge der Spannungen $|\tau_{\max}|$:

Abschnitt I: $$|\tau_{\max,\mathrm{I}}| = \frac{M_0}{I_{p1}}\frac{d_1}{2}\frac{3\eta+2}{2(1+\eta)} \tag{91}$$

Abschnitt II: $$|\tau_{\max,\mathrm{II}}| = \frac{M_0}{I_{p1}}\frac{d_1}{2}\frac{\eta+2}{2(1+\eta)} \tag{92}$$

Abschnitt III: $$|\tau_{\max,\mathrm{III}}| = \frac{M_0}{I_{p1}}\frac{d_1}{2}\frac{\eta+2}{2(1+\eta)}\frac{\eta}{\xi} \tag{93}$$

Abschnitt VI: $$|\tau_{\max,\mathrm{IV}}| = \frac{M_0}{I_{p1}}\frac{d_1}{2}\frac{\eta}{2(1+\eta)}\frac{\eta}{\xi} \tag{94}$$

Gesucht ist die maximale Spannung $|\tau_{\max}|$ im Bereich I+II im Vergleich zu der maximalen Spannung im Bereich III+IV. Aus der obigen Aufstellung ist ersichtlich das $\tau_{\max,\mathrm{I}} > \tau_{\max,\mathrm{II}}$ und $\tau_{\max,\mathrm{III}} > \tau_{\max,\mathrm{IV}}$. Das heißt, da wir gleiche maximale Spannungen in I+II und III+IV haben wollen, muß $\tau_{\max,\mathrm{I}} = \tau_{\max,\mathrm{III}}$ sein!

$$\tau_{max,I} = \tau_{max,III} \tag{95}$$

$$\Rightarrow\ 3\eta + 2 = (\eta+2)\frac{\eta}{\xi} \tag{96}$$

$$\Leftrightarrow\ \xi(3\eta+2) = 2\eta + \eta^2 \tag{97}$$

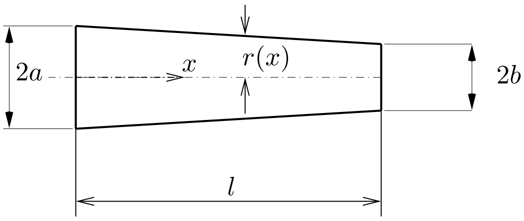
$$\Leftrightarrow\ \xi(3\xi^4+2) = 2\xi^4 + \xi^8 \quad (\text{mit } \eta = \xi^4) \tag{98}$$

$$\Leftrightarrow\ \xi^7 - 3\xi^4 + 2\xi^3 - 2 = 0 \tag{99}$$

Die numerische Lösung lautet: $\xi = 1{,}29$.

Aufgabe 100

(a)



Geradengleichung für den Radius des Kegels:

$$\begin{aligned} r(x) &= \frac{b-a}{l}x + a \\ &:= \alpha x + \beta \end{aligned}$$

Polares Trägheitsmoment für die Kreisfläche:

$$\begin{aligned} I_p(x) &= \frac{\pi}{2}r(x)^4 \\ &= \frac{\pi}{2}(\alpha x + \beta)^4 \end{aligned}$$

(b) Annahmen $M_t = const.$, $G = const.$, Torsions-Dgl. (gilt eigentlich nur für zylindrische Abschnitte, d.h. der Kegel muss stumpf sein! Siehe Szabo)

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dx} &= \frac{M_T}{GI_p} \\ \varphi &= \int_0^l \frac{M_T}{G\frac{\pi}{2}(\alpha x+\beta)^4}dx \\ &= \frac{2M_T}{G\pi}\int_0^l \frac{1}{(\alpha x+\beta)^4}dx \\ &= \frac{2M_T}{G\pi}\int_0^l \frac{1}{z^4}\frac{1}{\alpha}dz \\ &= \frac{2M_T}{G\pi}\left[-\frac{1}{3}\frac{1}{z^3}\frac{1}{\alpha}\right]_a^b \\ &= \frac{2M_T l}{3G\pi(b-a)}\left(\frac{1}{a^3} - \frac{1}{b^3}\right) \end{aligned}$$
