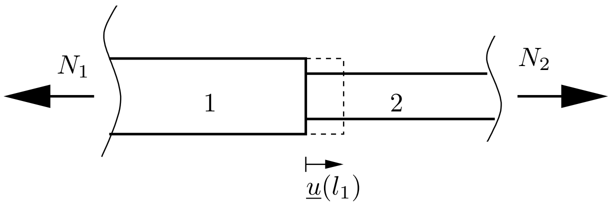
Tutorium

Aufgabe 80

(a)

Gleichgewichtsbedingung:



$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad N_1 = N_2 \tag{1}$$

Einsetzen der Definition der Spannung $\sigma = \frac{N}{A}$ liefert daraus:

$$\sigma_1 A_1 = \sigma_2 A_2 \tag{2}$$

Zusammenhang der Längenänderungen:

Die Längenänderung der beiden Stäbe sei Δl_1 und Δl_2. Wegen der festen Einspannung rechts und links gilt:

$$\Delta l_1 + \Delta l_2 = 0 \tag{3}$$

Wer das nicht sofort sieht, kann auch auf die uns bekannte Weise die Längenänderungen bestimmen

$$\Delta l_1 = \underline{e}_1 \cdot \underline{u} = \underline{e}_x \cdot \underline{u} = u \tag{4}$$

$$\Delta l_2 = \underline{e}_2 \cdot \underline{u} = -\underline{e}_x \cdot \underline{u} = -u \tag{5}$$

$$\Rightarrow \quad \Delta l_1 = -\Delta l_2 \tag{6}$$

Einsetzen der Definition der Dehnung bei homogener Deformation $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$ liefert daraus:

$$\varepsilon_1 l_1 + \varepsilon_2 l_2 = 0 \tag{7}$$

Nach dem Superpositionsprinzip dürfen mechanische und thermische Dehnung zur Gesamtdehnung addiert werden

$$\varepsilon = \varepsilon_{mech} + \varepsilon_{therm} \tag{8}$$

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \alpha \Delta T \tag{9}$$

Aus (7) und mit (9):

$$\Big(\frac{\sigma_1}{E_1} + \alpha_1 \Delta T_1\Big) l_1 + \Big(\frac{\sigma_2}{E_2} + \alpha_2 \Delta T_2\Big) l_2 = 0 \tag{10}$$

Einsetzen von (2) nach σ_2 aufgelöst:

$$\Big(\frac{\sigma_1}{E_1} + \alpha_1 \Delta T_1\Big) l_1 + \Big(\frac{\sigma_1}{E_2}\frac{A_1}{A_2} + \alpha_2 \Delta T_2\Big) l_2 = 0 \tag{11}$$

$$\sigma_1 = -\frac{\alpha_1 \Delta T_1 l_1 + \alpha_2 \Delta T_2 l_2}{A_1\Big(\frac{l_1}{E_1 A_1} + \frac{l_2}{E_2 A_2}\Big)} \tag{12}$$

Einsetzen von (2) nach σ_1 aufgelöst in (10) liefert analog dazu:

$$\sigma_2 = -\frac{\alpha_1 \Delta T_1 l_1 + \alpha_2 \Delta T_2 l_2}{A_2\Big(\frac{l_1}{E_1 A_1} + \frac{l_2}{E_2 A_2}\Big)} \tag{13}$$

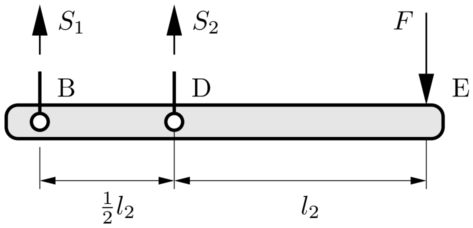
(b)

$$\sigma_1 = -29{,}2\ \text{MPa} \tag{14}$$

$$\sigma_2 = -45{,}7\ \text{MPa} \tag{15}$$

Aufgabe 81

(a) Freischnitt und Gleichgewichtsbedingungen:



$$\sum M^{(D)} = 0 \quad \Rightarrow \quad S_1 = -2F \qquad (16)$$

$$\sum M^{(B)} = 0 \quad \Rightarrow \quad S_2 = 3F \qquad (17)$$

Materialgesetze und Verschiebungsverzerrungsgleichungen:

$$\boxed{\sigma = E\varepsilon}, \quad \varepsilon = \frac{\Delta l}{l}, \quad \sigma = \frac{S}{A} \qquad (18)$$

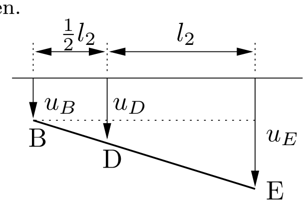
$$\Rightarrow \boxed{S = EA\frac{\Delta l}{l}} \quad \Leftrightarrow \quad \Delta l = l\frac{S}{EA} \qquad (19)$$

$$\text{Stab AB:} \quad \Delta l_1 = l_1\frac{-2F}{E_1A_1} = -0{,}514 \text{ mm} \qquad (20)$$

$$\text{Stab CD:} \quad \Delta l_2 = l_2\frac{3F}{E_2A_2} = 0{,}3 \text{ mm} \qquad (21)$$

Stab AB wird also kürzer und Stab CD länger.

(b) Aus dem Strahlensatz wird die Verschiebung u_E des Punktes E bestimmt: *Hinweis:* In der folgenden Skizze haben alle Größen positive Werte, damit beim dann folgenden Ableiten der Gleichungen die Bestimmung des richtigen Vorzeichens leichter fällt. Die Skizze zeigt also nicht die gerade berechneten Längenänderungen.



Aus dem Strahlensatz wird die Verschiebung u_E des Punktes E bestimmt:

$$\text{mit} \quad u_B = \Delta l_1\,,\ u_D = \Delta l_2 \qquad (22)$$

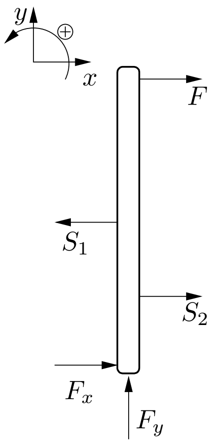
$$\frac{u_E - u_B}{\frac{3}{2}l_2} = \frac{u_D - u_B}{\frac{1}{2}l_2} \qquad (23)$$

$$\Rightarrow \ u_E = 3\Delta l_2 - 2\Delta l_1 \qquad (24)$$

$$u_E = F\left(\frac{9l_2}{E_2A_2} + \frac{4l_1}{E_1A_1}\right) = 1{,}93 \text{ mm} \qquad (25)$$

Aufgabe 82

(a) Freischnittskizze und Gleichgewichtsbedingungen



Gleichgewichtsbedingungen am unverformten System:

$$\sum M^{(F)} = 0$$

$$-F\cdot 2a + S_1\cdot a - S_2\cdot\frac{a}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 2S_1 - S_2 = 4F \qquad (26)$$

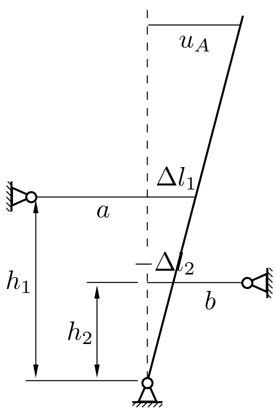
Man erkennt, dass nicht alle unbekannten Kräfte F_x, F_y und S_1, S_2 aus den Gleichgewichtsbedingungen bestimmt werden können. Das System ist einfach statisch unbestimmt.

(b) Materialgesetz

$$S_1 = EA\cdot\frac{\Delta l_1}{a} \qquad (27)$$

$$S_2 = EA\cdot\frac{\Delta l_2}{b} \qquad (28)$$

Verformungen



Längen in der verformten Lage:

$$l_1 = a + \Delta l_1$$
$$l_2 = b + \Delta l_2$$

Δl_1, Δl_2 sind Verlängerungen der Stäbe.

$$\frac{\Delta l_1}{h_1} = \frac{-\Delta l_2}{h_2}$$

$$\Delta l_1 = -\frac{h_1}{h_2}\Delta l_2 = -2\,\Delta l_2 \qquad (29)$$

Die vier Gleichungen (26) - (29) ermöglichen die Berechnungen der vier Unbekannten S_1, S_2, Δl_1 und Δl_2.

(27), (28) in (29)

$$\frac{aS_1}{EA} + \frac{2bS_2}{EA} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad aS_1 + 2bS_2 = 0 \qquad (30)$$

$$(30), (26) \ \Rightarrow \ S_2 = -\frac{4a}{a+4b}F \, < \, 0 \quad \text{(Druck)} \qquad (31)$$

$$S_1 = \frac{8b}{a+4b}F \, > \, 0 \quad \text{(Zug)} \qquad (32)$$

$$S_2 = \text{-1,67 kN}, \ S_1 = 4{,}17 \text{ kN} \qquad (33)$$

(c) horizontale Auslenkung des Punktes A aus der Verformungsskizze oben mit Strahlensatz:

$$u_A = 2\Delta l_1 \qquad (34)$$

$$= \frac{2aS_1}{EA} = \frac{16abF}{EA(a+4b)} = 0{,}0579 \text{ mm} \qquad (35)$$

Hausaufgaben

Aufgabe 77

(a)

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = 2{,}5\ 10^{-3} \tag{36}$$

(b)

$$\sigma = E\varepsilon = 525\ \mathrm{N/mm^2} \tag{37}$$

(c)

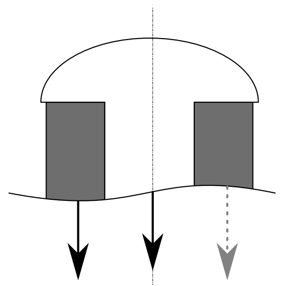
$$F = A\sigma \quad \Rightarrow \quad A = \frac{F}{\sigma} = 19{,}05\ \mathrm{mm^2} \tag{38}$$

$$A = \frac{\pi}{4}d^2 \quad \Rightarrow \quad d = \sqrt{\frac{4A}{\pi}} = 4{,}92\ \mathrm{mm} \tag{39}$$

Aufgabe 90

Der Niet will sich wegen der Temperaturabkühlung zusammenziehen, wird daran aber durch die Hülsen gehindert. Infolge dessen drückt er auf die Hülsen, im Niet selbst liegt eine Zugbeanspruchung vor.

Gleichgewicht:



Die Normalkraft in den Hülsen $F_{n,Hi}$ mit $i = 1,2$ verteilt sich umlaufend auf die Hülse und geht damit nur einfach in das Kräftegleichgewicht ein:

$$-F_{n,H1} = -F_{n,H2} = F_{n,\mathrm{Niet}} =: F \quad . \tag{40}$$

Kinematik:

$$\Delta\ell_{H1} + \Delta\ell_{H2} = \Delta\ell_N \tag{41}$$

Materialgesetz:

$$\varepsilon_{H1} = \frac{\Delta\ell_{H1}}{\ell} = \frac{-F}{E_{H1}A_{H1}} \tag{42}$$

$$\varepsilon_{H2} = \frac{\Delta\ell_{H2}}{\ell} = \frac{-F}{E_{H2}A_{H2}} \tag{43}$$

$$\varepsilon_N = \frac{\Delta\ell_N}{2\ell} = \frac{F}{E_N A_N} + \alpha_t \Delta T \tag{44}$$

Gleichungen 42 bis 44 werden in 41 eingesetzt:

$$-\frac{F\ell}{E_{H1}A_{H1}} - \frac{F\ell}{E_{H2}A_{H2}} = \frac{F\cdot 2\ell}{E_N A_N} + 2\alpha_t \Delta T \ell \tag{45}$$

Man erhält für die Kraft

$$F\left(-\frac{\ell}{E_{H1}A_{H1}} - \frac{\ell}{E_{H2}A_{H2}} - \frac{2\ell}{E_N A_N}\right) = 2\alpha_t\Delta T\ell$$

$$\Rightarrow F = -\frac{2\alpha_t\Delta T}{\frac{1}{E_{H1}A_{H1}} + \frac{1}{E_{H2}A_{H2}} + \frac{2}{E_N A_N}}$$

$$= -\frac{2\cdot 12\cdot 10^{-6}\cdot(290-520)}{\frac{1}{2{,}1\cdot 10^5\cdot 300\pi} + \frac{1}{0{,}8\cdot 10^5\cdot 525\pi} + \frac{2}{2{,}1\cdot 10^5\cdot 100\pi}}$$

$$= 128.531\mathrm{N} = 128,5\mathrm{kN}$$

und für die Spannung

$$\sigma_N = \frac{F_N}{A_N} = \frac{128,5}{\frac{2^2}{4}\pi} = 40,9\mathrm{kN/cm^2}$$
