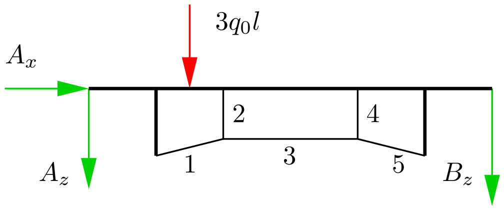
Tutorium

Aufgabe 73

(a) Das System, bestehend aus zwei Rahmen und fünf Stäben, ist in sich starr.



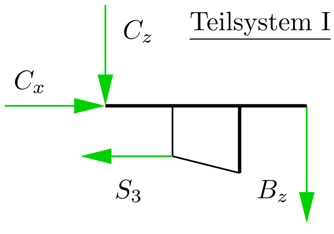
Freischneiden des Gesamtsystems von der Umgebung macht die drei unbekannten Lagerreaktionen sichtbar. Die Gleichgewichtsbedingungen $\Sigma F_x = 0$, $\Sigma F_z = 0$ und $\Sigma M^{(A)} = 0$ liefern

$$
\begin{aligned}
0 &= A_x \\
0 &= A_z + 3q_0l + B_z \\
0 &= -\frac{9}{2}q_0l^2 - 6lB_z
\end{aligned}
$$

und damit die gesuchten Größen

$$
A_x = 0 \quad , \quad A_z = -\frac{9}{4}q_0l \quad , \quad B_z = -\frac{3}{4}q_0l \quad .
$$

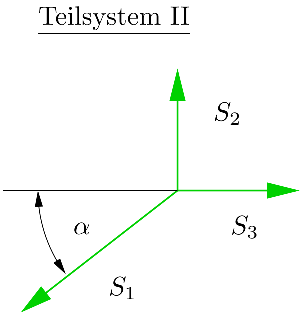
Zur Berechnung der Stabkräfte kann man das System in der Mitte teilen. Dabei muss durch das Gelenk C und den Stab 3 geschnitten werden.

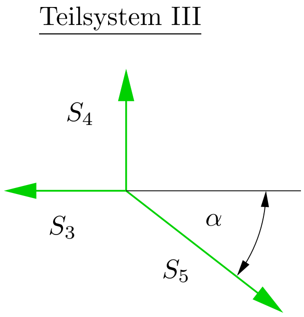


Die Gleichgewichtsbedingung $\Sigma M^{(C)} = 0$ am rechten Teilsystem (TS I) liefert dann

$$
0 = \frac{9}{4}q_0l^2 - \frac{2}{3}lS_3 \quad \Rightarrow \quad S_3 = \frac{27}{8}q_0l \; .
$$

Freischnitte der beiden Knoten, in denen sich jeweils drei Stäbe treffen, ermöglichen die Berechnung der fehlenden Stabkräfte.





Zunächst wird der Winkel α eingeführt. Aus der Geometrie erkennt man

$$
\sin\alpha = \frac{1}{10}\sqrt{10} \quad , \quad \cos\alpha = \frac{3}{10}\sqrt{10} \quad .
$$

Am linken Knoten (Teilsystem II) ergibt sich aus dem Kräftegleichgewicht

$$
\begin{aligned}
0 &= S_3 - S_1\cos\alpha \\
0 &= -S_2 + S_1\sin\alpha
\end{aligned}
$$

und damit

$$
S_1 = \frac{9}{8}\sqrt{10}q_0l \quad , \quad S_2 = \frac{9}{8}q_0l \quad .
$$

Analog verfährt man am rechten Knoten (Teilsystem III) und erhält

$$
S_5 = \frac{9}{8}\sqrt{10}q_0l \quad , \quad S_4 = \frac{9}{8}q_0l \quad .
$$

(b) Die Querkraft $Q(x)$ und das Biegemoment $M(x)$ sollen mittels der Schnittlastendifferentialgleichungen

$$
\frac{dM}{dx} = Q \quad , \quad \frac{dQ}{dx} = -q \tag{1}
$$

bestimmt werden. Laut Aufgabenstellung sollen die Schnittlasten nur im Bereich $0 < x < 3l$ bestimmt werden. Bei $x = l$ werden durch den angeschweißten Querträger ein Moment und eine Kraft eingeleitet. Bei $x = 2l$ wird durch den gelenkig angebundenen Stab eine Kraft in den horizontalen Träger eingeleitet. Somit muss der untersuchte Abschnitt in drei Bereiche eingeteilt werden.

Bereich	x-Koordinate	Biegemoment	Querkraft
1	$0 < x < l$	M_1	Q_1
2	$l < x < 2l$	M_2	Q_2
3	$2l < x < 3l$	M_3	Q_3

Im gesamten untersuchten Bereich gilt

$$
q(x) = q_0 \; .
$$

Integration der Differentialgleichungen (1) liefert

$$
M_1 = -\frac{1}{2}q_0x^2 + a_1x + a_2 \tag{2a}
$$

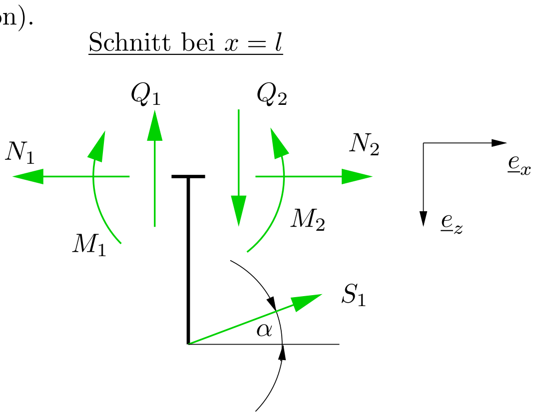
$$
M_2 = -\frac{1}{2}q_0x^2 + b_1x + b_2 \tag{2b}
$$

$$
M_3 = -\frac{1}{2}q_0x^2 + c_1x + c_2 \quad . \tag{2c}
$$

Zur Bestimmung der sechs Unbekannten benötigt man sechs Rand- und Übergangsbedingungen. Am linken Rand ($x = 0$) ist das Moment Null

$$
0 = M_1(0) \quad . \tag{3}
$$

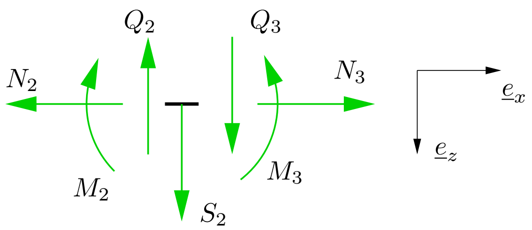
Bei $x = l$ können die Übergangsbedingungen nur mit Hilfe eines Freischnittes formuliert werden. Dabei ist besondere Sorgfalt bei den Vorzeichen angebracht (Schnittuferkonvention).



Kräfte- und Momentengleichgewicht liefert die folgenden Beziehungen

$$0 = -Q_1(l) + Q_2(l) - S_1 \sin\alpha \tag{4}$$
$$0 = -M_1(l) + M_2(l) + lS_1 \cos\alpha \quad . \tag{5}$$

Bei $x = 2l$ muss man wiederum einen Freischnitt zu Rate ziehen.



$$0 = -Q_2(2l) + Q_3(2l) + S_2 \tag{6}$$
$$0 = -M_2(2l) + M_3(2l) \quad . \tag{7}$$

Schließlich erkennt man bei $x = 3l$ ein Gelenk und fordert

$$0 = M_3(3l) \quad . \tag{8}$$

Einsetzen von (2) in die Randbedingungen (3) bis (8) liefert nach einiger Rechnung[1]

$$a_1 = \frac{9}{4}q_0 l \quad , \quad a_2 = 0 \quad ,$$
$$b_1 = \frac{27}{8}q_0 l \quad , \quad b_2 = -\frac{9}{2}q_0 l^2 \quad ,$$
$$c_1 = \frac{9}{4}q_0 l \quad , \quad c_2 = -\frac{9}{4}q_0 l^2 \quad .$$

Einsetzen ergibt schließlich für das Biegemoment

$$M_1 = q_0 l^2 \left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{l}\right)^2 + \frac{9}{4}\frac{x}{l}\right]$$
$$M_2 = q_0 l^2 \left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{l}\right)^2 + \frac{27}{8}\frac{x}{l} - \frac{9}{2}\right]$$
$$M_3 = q_0 l^2 \left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{l}\right)^2 + \frac{9}{4}\frac{x}{l} - \frac{9}{4}\right]$$

und die Querkraft

$$Q_1 = q_0 l \left[-\frac{x}{l} + \frac{9}{4}\right] = Q_3$$
$$Q_2 = q_0 l \left[-\frac{x}{l} + \frac{27}{8}\right] \quad .$$

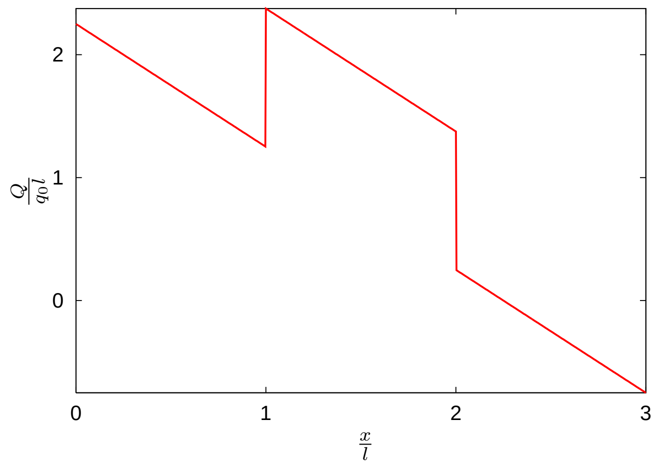
In vielen Anwendungen ist die Kenntnis des Biegemomentes entscheidend. Der Vollständigkeit wegen soll schließlich auch der Normalkraftverlauf berechnet werden. Da es hier keine Streckenlast in Balkenlängsrichtung gibt ($n(x) = 0$), muss die Normalkraft abschnittsweise konstant sein. Ein Freischnitt des linken Lagers A liefert mit $A_x = 0$ für die Normalkraft im Bereich $0 < x < l$ das Ergebnis $N_1(x) = 0$. Der Schnitt bei $x = l$ liefert zusammen mit einem Kräftegleichgewicht in x-Richtung $N_2(x) = -\frac{27}{8}ql$. Der Schnitt bei $x = 2l$ gibt zudem $N_3(x) = N_2(x)$.

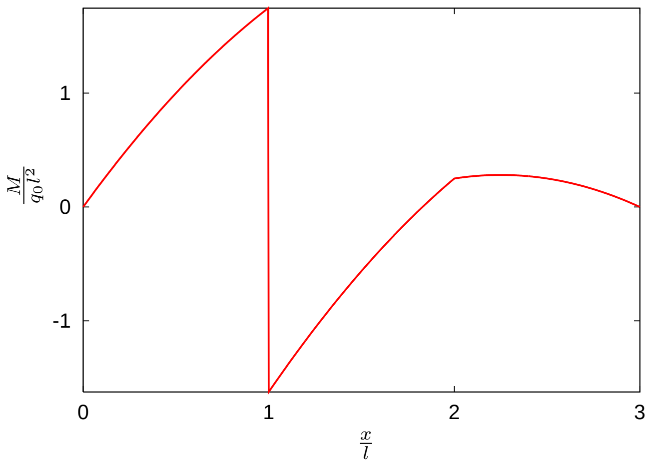
[1] Das ist der Moment, wo man spätestens zu Stift und Papier greifen sollte.

(c) charakteristische Werte

$$M_1(l) = \frac{7}{4}q_0 l^2$$
$$M_2(l) = -\frac{13}{8}q_0 l^2$$
$$M_2(2l) = \frac{1}{4}q_0 l^2 = M_3(2l)$$
$$Q_1(0) = \frac{9}{4}q_0 l$$
$$Q_1(l) = \frac{5}{4}q_0 l$$
$$Q_2(l) = \frac{19}{8}q_0 l$$
$$Q_2(2l) = \frac{11}{8}q_0 l$$
$$Q_3(2l) = \frac{1}{4}q_0 l$$
$$Q_3(3l) = -\frac{3}{4}q_0 l$$

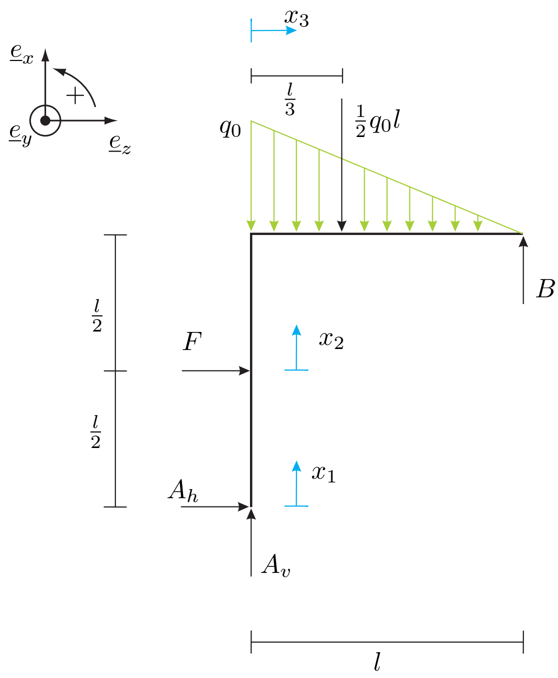
Die Bilder zeigen die Verläufe für die Querkraft und das Biegemoment.





Aufgabe 71

(a) Für die Berechnung der Schnittgrößen werden die Laggerreaktionen benötigt. Um diese zu bestimmen wird das Gesamtsystem freigeschnitten:



Beim Aufstellen der Gleichgewichtsbedingungen wird das globale $\underline{e}_x$, $\underline{e}_y$, $\underline{e}_z$-System benutzt (siehe Aufgabenstellung). Die Ersatzlast der Streckenlast wird **nach** dem Freischnitt angetragen (auf die Bestimmung der Ersatzlast und des Angriffspunktes einer Dreiecks-Last wird hier nicht weiter eingegangen.).
Momentengleichgewicht um Punkt A:

$$\sum M^{(A)} = -\frac{l}{2}F - \frac{1}{3}l \cdot \frac{1}{2}q_0 l + lB \stackrel{!}{=} 0 \tag{9}$$

$$\Rightarrow \boxed{B = \frac{1}{2}F + \frac{1}{6}q_0 l} \tag{10}$$

Kräftegleichgewicht in x-Richtung:

$$\sum F_x = A_h + F \stackrel{!}{=} 0 \tag{11}$$

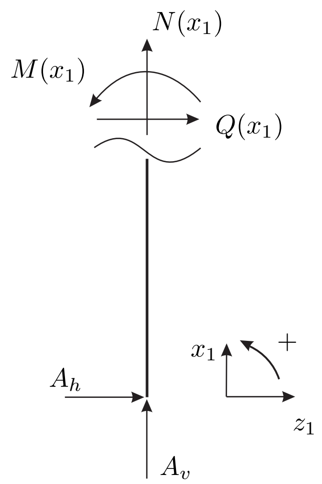
$$\Rightarrow \boxed{A_h = -F} \tag{12}$$

Kräftegleichgewicht in y-Richtung (mit Gleichung (10)):

$$\sum F_y = A_v + B - \frac{1}{2}q_0 l \stackrel{!}{=} 0 \tag{13}$$

$$\Rightarrow \boxed{A_v = -\frac{1}{2}F + \frac{1}{3}q_0 l} \tag{14}$$

Für die Berechnung der Schnittkräfte wird das System in drei Bereiche geteilt (bei jeder Unstetigkeitsstelle fängt ein neuer Bereich an, hier bei der Krafteinleitung und der Geometrieänderung). Der erste Bereich geht vom Lager A bis zu der eingeleiteten Kraft F. Die Schnittgrößen in diesem Abschnitt werden in Abhängigkeit der Koordinate x_1 beschrieben[2]. Die berechneten Lagergrößen werden gleich eingesetzt.



$$\sum F \uparrow: \quad A_v + N(x_1) \stackrel{!}{=} 0 \tag{15}$$

$$\Rightarrow \boxed{N(x_1) = \frac{1}{2}F - \frac{1}{3}q_0 l} \tag{16}$$

$$\sum F \rightarrow: \quad = A_h + Q(x_1) \stackrel{!}{=} 0 \tag{17}$$

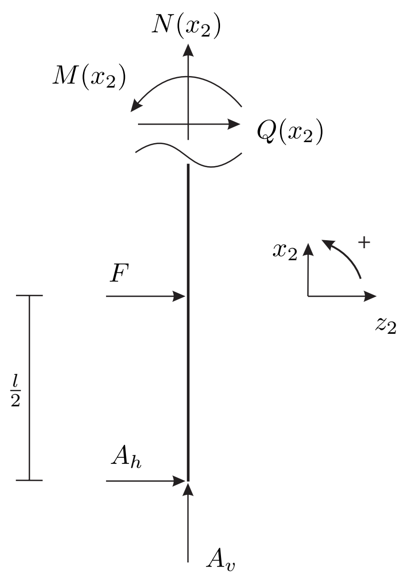
$$\Rightarrow \boxed{Q(x_1) = F} \tag{18}$$

Das Momentengleichgewicht wird bei Schnittgrößenberechnung um den Schnittpunkt (hier also um die Stelle x_1) aufgestellt.

$$\sum M \curvearrowleft: \quad M(x_1) + A_h x_1 \stackrel{!}{=} 0 \tag{19}$$

$$\Rightarrow \boxed{M(x_1) = F x_1} \tag{20}$$

Der zweite Bereich geht von der eingeleiteten Kraft bis zu der Geometrieänderung des Tragwerkes. Hier werden die Schnittgrößen in Abhängigkeit der Koordinate x_2 beschrieben.



[2]Dies ist eine lokale Koordinate. Die Ergebnisse hängen nicht von der Wahl des Koordinatensystems ab, diese ist also im Prinzip frei. Hier werden die lokalen Koordinaten so gewählt, dass die x-Achse in Balkenrichtung geht.

$$\sum F \uparrow: \quad A_v + N(x_2) \stackrel{!}{=} 0 \tag{21}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{N(x_2) = \frac{1}{2}F - \frac{1}{3}q_0 l} \tag{22}$$

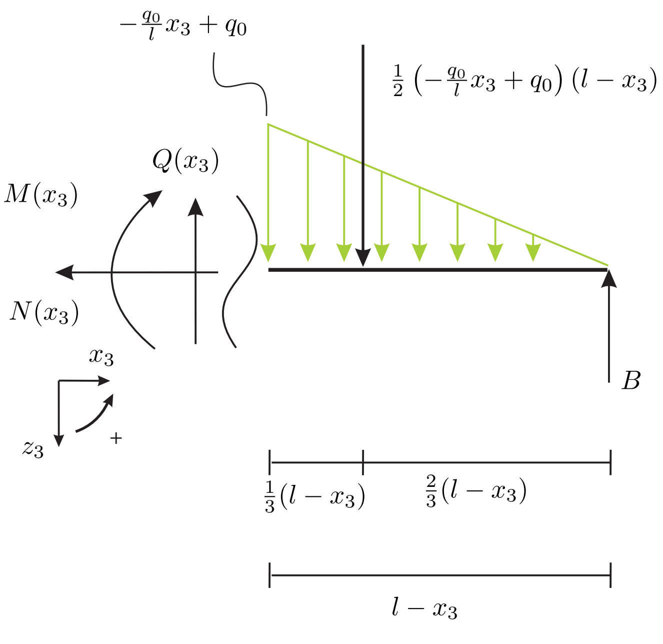
$$\sum F \rightarrow: \quad A_h + F + Q(x_2) \stackrel{!}{=} 0 \tag{23}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{Q(x_2) = 0} \tag{24}$$

$$\sum M \curvearrowleft: \quad M(x_2) + A_h(\frac{l}{2} + x_2) + F x_2 \stackrel{!}{=} 0 \tag{25}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{M(x_2) = \frac{l}{2}F} \tag{26}$$

Der dritte Bereich geht von der Geometrieänderung bis zum Ende des Balkens. Hier ist zu beachten, das die globale Koordinate x_3, in dessen Abhängigkeit die Schnittgrößen in diesem Abschnitt beschrieben werden, in Richtung des Balkens zeigt.



Ebenfalls wichtig ist in diesem Fall die Behandlung der Streckenlast. Es wird das negative Schnittufer gewählt, damit eine dreicksförmige Streckenlast behandelt werden muss und nicht eine trapezförmige. Die Ersatzkraft ändert sich mit veränderlichem x_3, mit anderen Worten: das Dreieck wird mit wachsendem x_3 kürzer. Die entsprechenden Werte für die Ersatzlast und den Angriffspunkt sind in der Skizze notiert.

$$\sum F \rightarrow: \quad -N(x_3) \stackrel{!}{=} 0 \tag{27}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{N(x_3) = 0} \tag{28}$$

$$\sum F \downarrow: \quad -Q(x_3) + \frac{1}{2}\left(-\frac{q_0}{l}x_3 + q_0\right)(l - x_3) - B \stackrel{!}{=} 0 \tag{29}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{Q(x_3) = \frac{1}{3}q_0 l - \frac{1}{2}F - q_0 x_3 + \frac{q_0}{2l}x_3^2} \tag{30}$$

$$\sum M \curvearrowleft: \quad -\frac{1}{2}\left(-\frac{q_0}{l}x_3 + q_0\right)(l - x_3)\frac{1}{3}(l - x_3) - M(x_3) + B(l - x_3) \stackrel{!}{=} 0 \tag{31}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{M(x_3) = -\frac{1}{6}\left(-\frac{q_0}{l}x_3 + q_0\right)(l - x_3)^2 + B(l - x_3)} \tag{32}$$

Hier wurde B aus Platzgründen nicht eingesetzt.

(b) Um die Schnittlasten zu skizzieren wird der gegebene Wert für F in die berechneten entsprechenden Verläufe in den drei Bereichen eingesetzt.

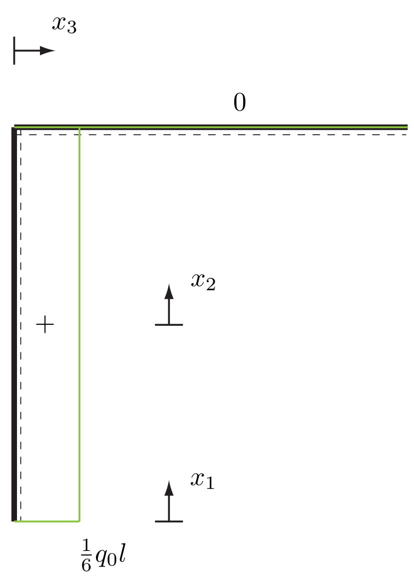
<u>Normalkraftverlauf:</u>

$$\text{Bereich 1} \quad \boxed{N(x_1) = \frac{1}{6}q_0 l} \tag{33}$$

$$\text{Bereich 2} \quad \boxed{N(x_2) = \frac{1}{6}q_0 l} \tag{34}$$

$$\text{Bereich 3} \quad \boxed{N(x_3) = 0} \tag{35}$$

Damit ergibt sich folgende Skizze für den Normalkraftverlauf:



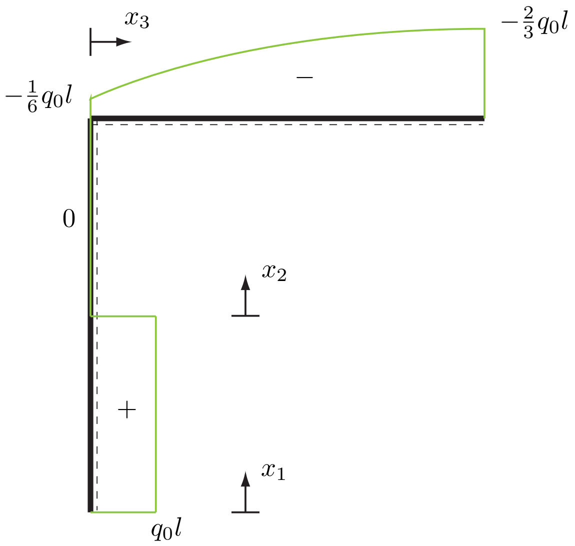
<u>Querkraftverlauf:</u>

$$\text{Bereich 1} \quad \boxed{Q(x_1) = F} \tag{36}$$

$$\text{Bereich 2} \quad \boxed{Q(x_2) = 0} \tag{37}$$

$$\text{Bereich 3} \quad \boxed{Q(x_3) = -q_0 x_3 + \frac{1}{2}\frac{q_0}{l}x_3^2 - \frac{1}{6}q_0 l} \tag{38}$$

Damit ergibt sich folgende Skizze für den Querkraftverlauf:



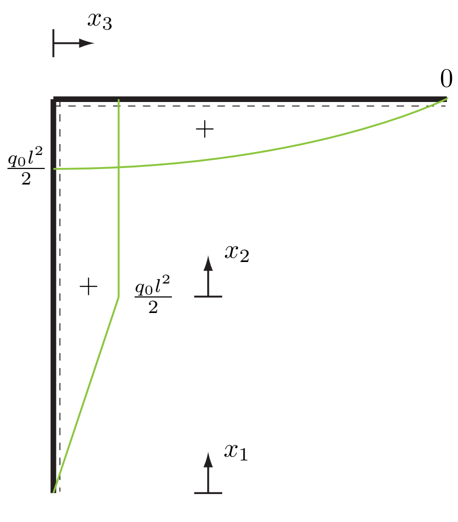
Biegemomentenverlauf:

Bereich 1 $\boxed{M(x_1) = q_0 l x_1}$ (39)

Bereich 2 $\boxed{M(x_2) = \frac{l}{2}F}$ (40)

Bereich 3 $\boxed{M(x_3) = \frac{1}{2}q_0 l^2 - \frac{1}{6}q_0 l x_3 - \frac{1}{2}q_0 x_3^2 + \frac{q_0}{6l}x_3^3}$ (41)

Damit ergibt sich folgende Skizze für den Biegemomententverlauf:



(c) Das maximale Biegemoment lässt sich leicht aus der Skizze aus dem vorigen Aufgabenteil ablesen:

$$\boxed{M_{\max} = \frac{q_0 l^2}{2}} \tag{42}$$

Hausaufgaben

Aufgabe 70

Lösung mittels Schnittlastendifferentialgleichung

(a) Zwei starre Scheiben ($n = 2$) sind je in A bzw. E fest gelagert ($b_{\text{Auflager}} = 2 \times 2$) und mit einem Gelenk C ($b_{\text{Gelenk}} = 2$) verbunden. Die notwendige Bedingung für statische Bestimmtheit:

$$3n = b = b_{\text{Auflager}} + b_{\text{Gelenk}} \tag{43}$$
$$6 = 4 + 2 = 6 \quad \checkmark \tag{44}$$

ist also erfüllt.

$$\tag{45}$$

Wie man mit etwas Rechung zeigt, lassen sich die Lagerreaktionen eindeutig bestimmen. Das System ist damit statisch bestimmt.

(b) Die Bereichseinteilung ist laut Aufgabenstellung bereits in lokalen Koordinaten vorgenommen. Dabei gilt:

$$x_1 \in [0, l] \qquad x_2 \in \left[0, \frac{2l}{\sqrt{3}}\right] \tag{46}$$
$$x_3 \in [0, l] \qquad x_4 \in [0, l] \tag{47}$$

Im gesamten System wirken keine Streckenlasten in die Balkenlängsrichtung:

$$q_x(x_i) = 0 \quad \text{mit } i = 1, 2, 3, 4 \quad . \tag{48}$$

Quer zur Balkenrichtung wirkt lediglich im ersten Bereich eine konstante Streckenlast:

$$q_z(x_1) = q_0 \tag{49}$$
$$q_z(x_j) = 0 \quad \text{mit } j = 2, 3, 4 \quad . \tag{50}$$

Damit ergeben sich die folgenden Schnittlastdifferentialgleichungen:

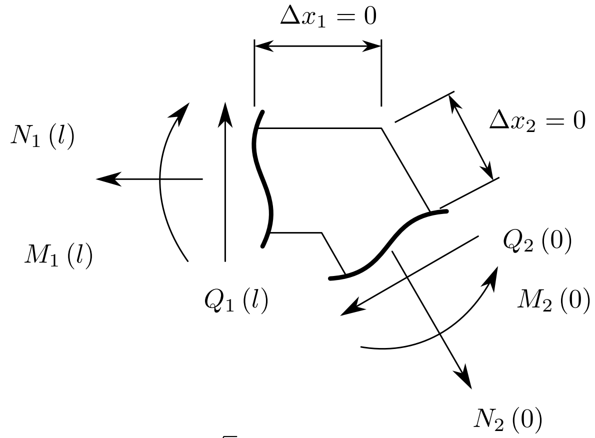
$$\frac{\mathrm{d}N_i\,(x)}{\mathrm{d}x_i} = 0 \quad \forall i \tag{51}$$
$$\frac{\mathrm{d}^2 M\,(x_1)}{\mathrm{d}x_1^2} = \frac{\mathrm{d}Q\,(x_1)}{\mathrm{d}x_1} = -q_0 \tag{52}$$
$$\frac{\mathrm{d}^2 M\,(x_j)}{\mathrm{d}x_j^2} = \frac{\mathrm{d}Q\,(x_j)}{\mathrm{d}x_j} = 0 \quad j = 2, 3, 4 \quad . \tag{53}$$

Die einfach Integration der Gleichung (48) ($\Rightarrow$ Normalkraft $N\,(x_i)$) liefert in jedem Berich eine Integrationskonstante. Um den Normalkraftverlauf in allen Berichen zu bestimmen, müssen vier Rand- und/oder Übergangsbedinungen für die Normalkraft formuliert werden.
Die SchnittlastDGL für das Biegemoment muss für jeden Bereich zweifach aufintegriert werden. Damit fallen in Summe 8 unbekannte Integrationskonstanten an. Es müssen daher acht Rand- und/oder Übergangsbedingungen für die Querkraft bzw. das Biegemoment formuliert werden.

(c) Die Rand- und Übergangsbedingungen lassen sich oft durch *scharfes Hinsehen* angeben. Im Zweifel kann stets ein Freischnitt der Bereichsgrenze(n)[3] zu Rate gezogen werden.
linker Rand vom ersten Bereich ($x_1 = 0$)
Das Lager A nimmt Kräfte in x- und z-Richtung auf. Für die Normal- und Querkraft lässt sich ohne weitere Rechnung keine Aussage treffen. Das Biegemoment muss allerdings verschwinden, da das Lager keine Momente aufnehmen kann:

$$\boxed{M_1\,(0) = 0} \quad . \tag{54}$$

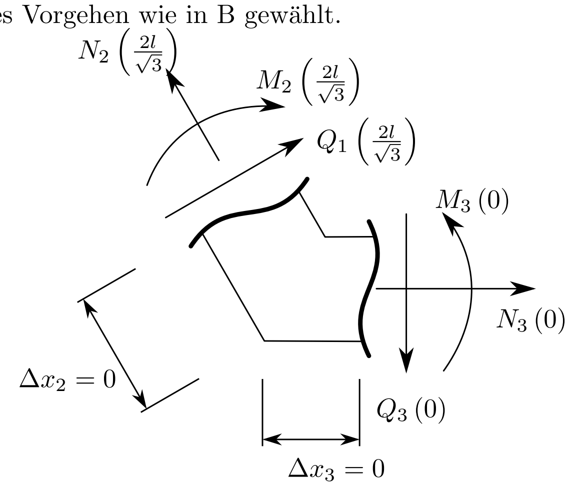
rechter Rand vom ersten Bereich ($x_1 = l$)
Am Winkel B ist zur Übersicht dringend ein Freischnitt zu empfehlen.



Mit $\sin(60°) = \sqrt{3}/2$ und $\cos(60°) = 1/2$ folgt aus den Gleichgewichtsbedingungen (globales Basissystem gewählt):

$$\boxed{-N_1\,(l) + \frac{1}{2}N_2\,(0) - \frac{\sqrt{3}}{2}Q_2\,(0) = 0} \tag{55}$$
$$\boxed{-Q_1\,(l) + \frac{\sqrt{3}}{2}N_2\,(0) + \frac{1}{2}Q_2\,(0) = 0} \tag{56}$$
$$\boxed{-M_1\,(l) + M_2\,(0) = 0} \tag{57}$$

rechter Rand vom zweiten Bereich ($x_2 = \frac{2l}{\sqrt{3}}$)
Für die Übergangsbedingungen im Winkel C wird ein analoges Vorgehen wie in B gewählt.



Auch hier lassen sich wieder die Gleichgewichtsbedingungen aufstellen. Es muss ausserdem beachtet werden, dass dass Biegemoment in C nicht nur stetig (Ergebniss der

[3]Dabei ist ein Element der Dicke „Null“freizuschneiden und daran die Gleichgewichtsbedingung zu formulieren.

GGW-Bed.), sondern aufgrund des Gelenks auch Null ist.

$$\boxed{-\frac{1}{2}N_2\left(\frac{2l}{\sqrt{3}}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}Q_2\left(\frac{2l}{\sqrt{3}}\right)-N_3\left(0\right)=0} \tag{58}$$

$$\boxed{-\frac{\sqrt{3}}{2}Q_2\left(\frac{2l}{\sqrt{3}}\right)-\frac{1}{2}Q_2\left(\frac{2l}{\sqrt{3}}\right)+Q_3\left(0\right)=0} \tag{59}$$

$$\boxed{M_2\left(\frac{2l}{\sqrt{3}}\right)=0} \tag{60}$$

$$\boxed{M_3\left(0\right)=0} \tag{61}$$

rechter Rand vom dritten Bereich ($x_3 = l$)
In D ist das Biegemoment stetig. Die Normalkraft am Rand des dritten Bereichs wird als Querkraft im vierten Bereich aufgenommen. Gleiches geschieht mit der Querkraft.

$$\boxed{-N_3\left(l\right)+Q_4\left(0\right)=0} \tag{62}$$

$$\boxed{Q_3\left(l\right)+N_4\left(0\right)=0} \tag{63}$$

$$\boxed{-M_3\left(l\right)+M_4\left(0\right)=0} \tag{64}$$

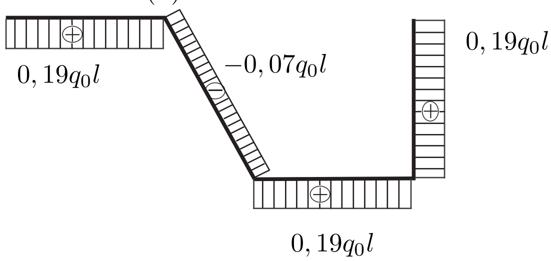
oberer Rand vom vierten Bereich ($x_4 = l$)
Wie im Lager A verschwindet hier das Biegemoment.

$$\boxed{M_4\left(l\right)=0} \tag{65}$$

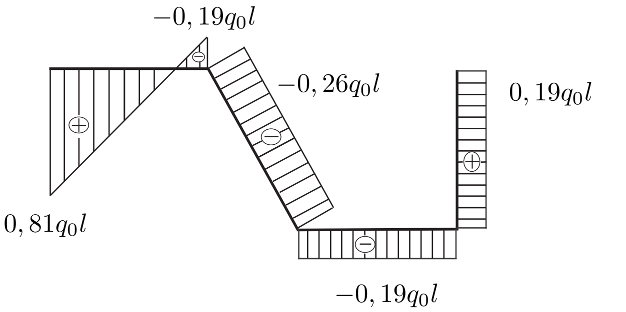
Damit sind 12 Rand- und Übergangsbedingungen für die 12 Integrationskonstanten gefunden. Über sukzessives Einsetzen der aufintegrierten Lösungen in die Bedingungen folgt ein lineares Gleichungssystem über das sich alle Konstanten bestimmen lassen.

(d)

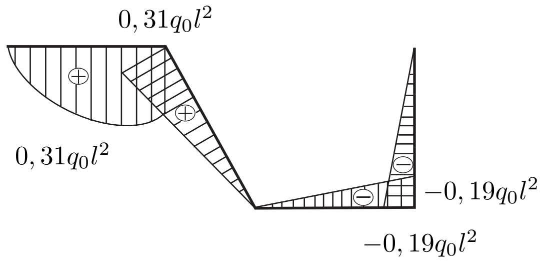
Normalkräfte $N(x)$



Querkräfte $Q(x)$



Biegemomente $M(x)$



Aufgabe 70

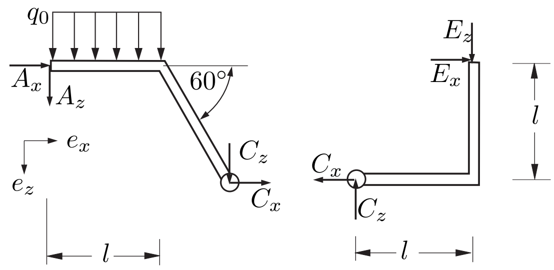
Lösung mittels Freischnitt

(a)

$$f = 2\cdot 3 = 6; \qquad r = 4; \qquad v = 2;$$
$$n = f - r - v = 0$$

Außerdem ist das System weder wackelig noch vorspannbar $\Rightarrow$ System ist statisch bestimmt.

(b)



$$A_x + C_x = 0$$
$$A_z + C_z + q_0 l = 0$$
$$C_x l - C_z(l + \frac{1}{\sqrt{3}}l) - q_0\frac{l^2}{2} = 0$$

$$E_x - C_x = 0$$
$$E_z - C_z = 0$$
$$-C_x l - C_z l = 0$$

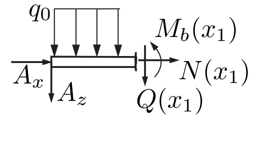
$$A_x = -\frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{3}+2}q_0 l \qquad A_z = -\frac{3\sqrt{3}+2}{4\sqrt{3}+2}q_0 l$$

$$C_x = \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{3}+2}q_0 l \qquad C_z = -\frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{3}+2}q_0 l$$

$$E_x = \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{3}+2}q_0 l \qquad E_z = -\frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{3}+2}q_0 l$$

(c)

Balkenelement 1: $0 < x_1 < l$

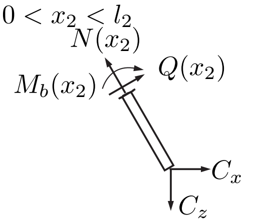


$$A_x + N(x_1) = 0$$
$$N(x_1) = \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{3}+2} q_0 l$$

$$Q(x_1) + A_z + q_0 x_1 = 0$$
$$Q(x_1) = \frac{3\sqrt{3}+2}{4\sqrt{3}+2} q_0 l - q_0 x_1$$

$$M_b(x_1) + A_z x_1 + \frac{1}{2} q_0 x_1^2 = 0$$
$$M_b(x_1) = \frac{3\sqrt{3}+2}{4\sqrt{3}+2} q_0 l x_1 - \frac{1}{2} q_0 x_1^2$$

Balkenelement 2: $0 < x_2 < l_2$



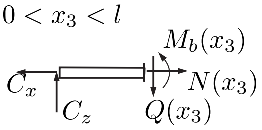
$$-N(x_2) + C_z \cos 30^\circ + C_x \cos 60^\circ = 0$$
$$N(x_2) = -\frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{3}+2} q_0 l \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{3}+2} q_0 l \frac{1}{2}$$
$$N(x_2) = \frac{1-\sqrt{3}}{2} \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{3}+2} q_0 l$$

$$-Q(x_2) + C_z \sin 30^\circ - C_x \sin 60^\circ = 0$$
$$Q(x_2) = -\frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{3}+2} q_0 l \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{3}+2} q_0 l \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$Q(x_2) = -(\frac{1+\sqrt{3}}{2}) \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{3}+2} q_0 l$$

$$l_2 = \frac{2}{\sqrt{3}} l$$
$$M_b(x_2) + C_z \sin 30^\circ (l_2 - x_2) - C_x \sin 60^\circ (l_2 - x_2) = 0$$

$$M_b(x_2) =$$
$$-(-\frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{3}+2}) q_0 l \frac{1}{2} (l_2 - x_2) + \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{3}+2} q_0 l \frac{\sqrt{3}}{2} (l_2 - x_2)$$
$$M_b(x_2) = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{3}+2} q_0 l (\frac{2}{\sqrt{3}} l - x_2)$$

Balkenelement 3: $0 < x_3 < l$

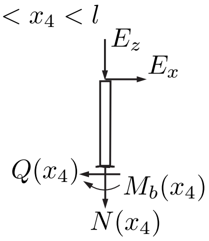


$$N(x_3) - C_x = 0$$
$$N(x_3) = \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{3}+2} q_0 l$$

$$Q(x_3) - C_z = 0$$
$$Q(x_3) = -\frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{3}+2} q_0 l$$

$$M_b(x_3) - C_z x_3 = 0$$
$$M_b(x_3) = -\frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{3}+2} q_0 l x_3$$

Balkenelement 4: $0 < x_4 < l$



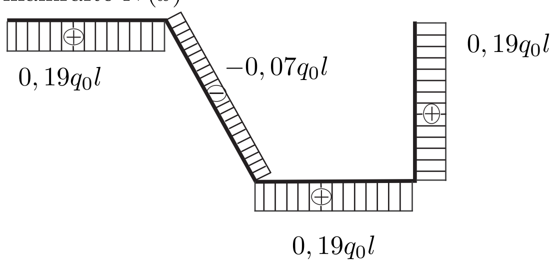
$$N(x_4) + E_z = 0$$
$$N(x_4) = \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{3}+2} q_0 l$$

$$Q(x_4) - E_x = 0$$
$$Q(x_4) = \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{3}+2} q_0 l$$

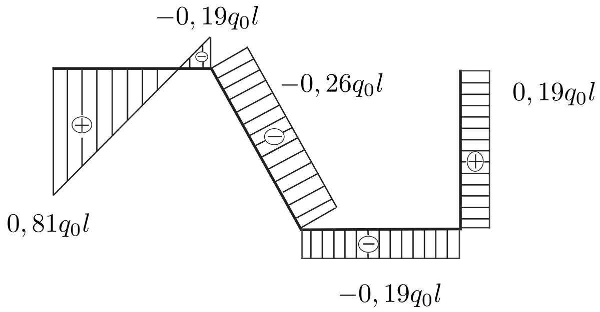
$$M_b(x_4) + E(l - x4) = 0$$
$$M_b(x_4) = -\frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{3}+2} q_0 l (l - x_4)$$

(d)

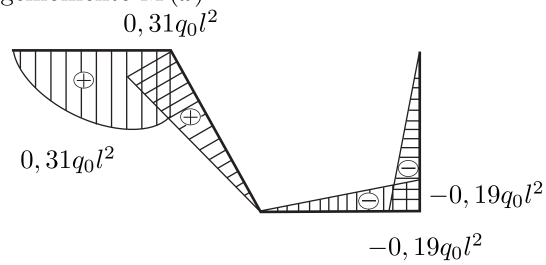
Normalkräfte $N(x)$



Querkräfte $Q(x)$

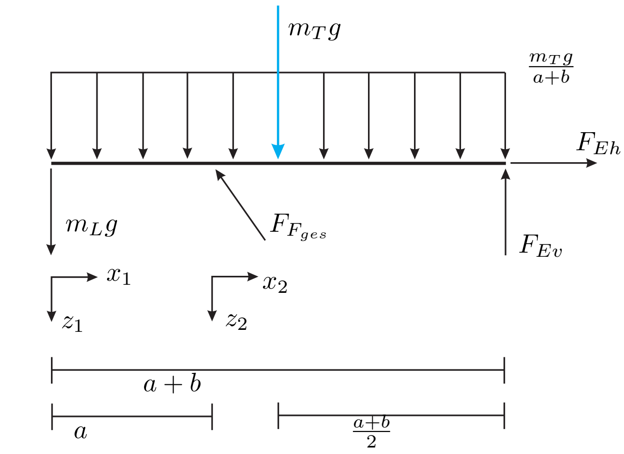


Biegemomente $M(x)$



Aufgabe 74

Freischnitt:



Lagerreaktionen:

$$\sum F_H = 0: \quad -F_{Fh} + F_{Eh} = 0 \tag{66}$$

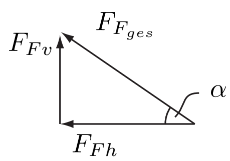
$$\sum F_V = 0: \quad -m_Lg - m_Tg + F_{Fv} + F_{Ev} = 0 \tag{67}$$

$$\sum M^{(E)} = 0: \quad -m_lg(a+b) - m_Tg(\frac{a+b}{2}) + F_{Fv}b = 0 \tag{68}$$

$$\text{mit} \quad F_{Fv} = F_{F_{ges}} \sin\alpha \tag{69}$$

$$\text{und} \quad F_{Fh} = F_{F_{ges}} \cos\alpha \tag{70}$$

Mit der Zerlegung der Kraft:



Einsetzen der Zahlenwerte und Auflösen liefert:

$$F_{Fv} \approx 2318N \tag{71}$$

$$F_{F_{ges}} \approx 2437N \tag{72}$$

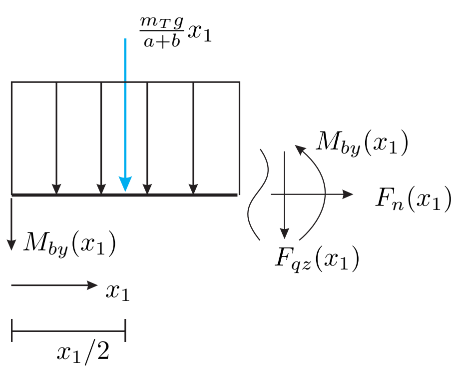
$$F_{Fh} \approx 753N \tag{73}$$

$$F_{Ev} \approx -699N \tag{74}$$

$$F_{Eh} \approx 753N \tag{75}$$

Berechnen der Schnittgrößen:

1. System:



$$\sum F_{x_1} = 0: \quad F_n = 0 \tag{76}$$

$$\sum F_{z_1} = 0: \quad -m_L g - \frac{m_T g}{a+b} x_1 - F_{qz}(x_1) = 0 \tag{77}$$

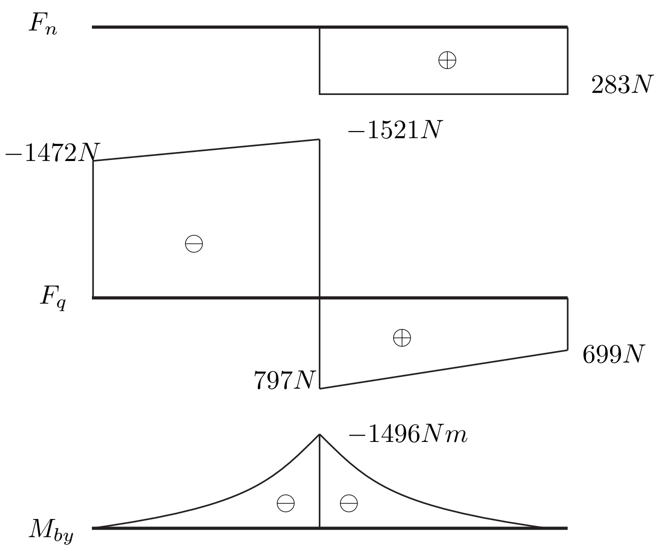
$$\Rightarrow \quad F_{qz}(x_1) = -m_L g - \frac{m_T g}{a+b} x_1$$

$$\underline{F_{qz}(x_1) = -1472N - 49\frac{N}{m} x_1} \tag{78}$$

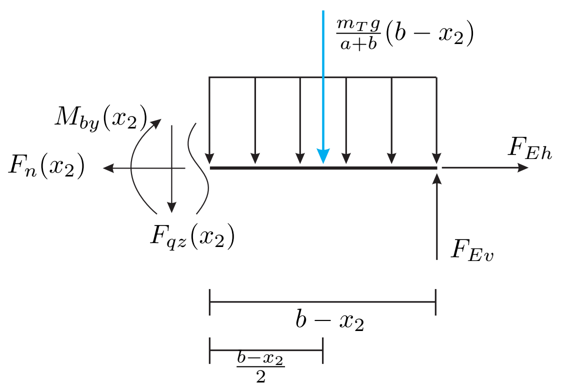
$$\sum M_{by}^{x_1} = 0: \quad M_{by}(x_1) + m_L g x_1 + \frac{m_T g}{a+b} x_1 \frac{x_1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad M_{by}(x_1) = -m_L g x_1 - \frac{m_T g}{a+b} \frac{x_1^2}{2}$$

$$\underline{M_{by}(x_1) = -1472N x_1 - 24,5\frac{N}{m} x_1^2} \tag{79}$$



2. System:



$$\sum F_{x_2} = 0: \quad -F_n(x_2) + F_{Eh} = 0 \tag{80}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{F_n(x_2)} = F_{Eh} = \underline{753N}$$

$$\sum F_{z_2} = 0: \quad F_{Ev} - \frac{m_T g}{a+b}(x_2 - b) + F_{qz}(x_2) = 0 \tag{81}$$

$$\Rightarrow \quad F_{qz}(x_2) = -F_{Ev} + \frac{m_T g}{a+b}(x_2 - b)$$

$$\underline{F_{qz}(x_2) = 797N - 49\frac{N}{m} x_2}$$

$$\sum M_{by}^{(x_2)} = 0: \quad M_{by}(x_2) + \frac{m_T g}{a+b}(b - x_2)\frac{1}{2}(b - x_2) - F_{Ev}(x_2 - b) = 0 \tag{82}$$

$$\Rightarrow \quad M_{by}(x_2) = F_{Ev}(x_2 - b) - \frac{m_T g}{2(a+b)}(x_2^2 - 2bx_2 + b^2)$$

$$M_{by}(x_2) = -24,5\frac{N}{m} x_2^2 + 797N x_2 - 1496Nm \tag{83}$$

Skizze: