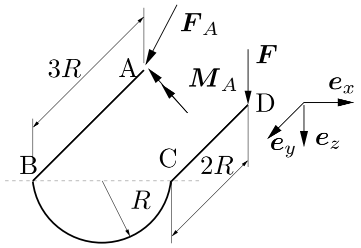
Tutorium

Aufgabe 34

Freischnitt anfertigen:



Die feste Einspannung muss im Freischnitt durch eine Kraft und ein Moment mit Komponenten in alle drei Achsenrichtungen ersetzt werden:

$$\boldsymbol{F}_A = F_x\boldsymbol{e}_x + F_y\boldsymbol{e}_y + F_z\boldsymbol{e}_z$$
$$\boldsymbol{M}_A = M_x\boldsymbol{e}_x + M_y\boldsymbol{e}_y + M_z\boldsymbol{e}_z$$

Bestimmung des Einspannmoments:
Momentengleichgewicht:

$$\sum \boldsymbol{M}^{(A)} = \boldsymbol{0} = \boldsymbol{M}_A + \boldsymbol{r}_{AD} \times \boldsymbol{F}$$

aus der Skizze folgt:

$$\boldsymbol{r}_{AD} = R(2\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y)$$
$$\boldsymbol{F} = F\boldsymbol{e}_z$$

Einsetzen in das Momentengleichgewicht führt zu:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{0} =& M_x\boldsymbol{e}_x + M_y\boldsymbol{e}_y ...\\ &... + M_z\boldsymbol{e}_z + RF(2\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y) \times \boldsymbol{e}_z\\ \boldsymbol{0} =& M_x\boldsymbol{e}_x + M_y\boldsymbol{e}_y ...\\ &... + M_z\boldsymbol{e}_z + RF(\boldsymbol{e}_x - 2\boldsymbol{e}_y)\\ 0\boldsymbol{e}_x + 0\boldsymbol{e}_y + 0\boldsymbol{e}_z =& (M_x + RF)\boldsymbol{e}_x ...\\ &... + (M_y - 2RF)\boldsymbol{e}_y + M_z\boldsymbol{e}_z\end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich:

$\boldsymbol{e}_x$: $0 = M_x + RF$
Daraus folgt: $\underline{M_x = -RF}$
$\boldsymbol{e}_y$: $0 = M_y - 2RF$
Daraus folgt: $\underline{M_y = 2RF}$
$\boldsymbol{e}_z$: $\underline{0 = M_z}$

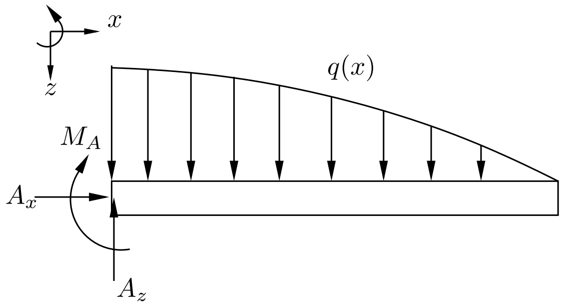
Bestimmen der Einspannkraft:
Kräftegleichgewicht:

$\sum \boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_A + \boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}$

Koeffizientenvergleich:

$\boldsymbol{e}_x$: $\underline{0 = F_x}$
$\boldsymbol{e}_y$: $\underline{0 = F_y}$
$\boldsymbol{e}_z$: $0 = F_z + F$
Daraus folgt: $\underline{F_z = -F}$

Aufgabe 36



<u>Kosinusfuktion</u> Eine allgemeine Form der Kosinusform lautet:

$$q(x) = Q\cos(kx) \tag{1}$$

Anpassen der Kosinusfunktion an die Randbedingungen ist erforderlich!

$$q(x=0) = q_0 \quad\Rightarrow\quad Q\cos(0) = q_0 \quad\Rightarrow\quad Q = q_0 \tag{2}$$
$$q(x=l) = 0 \quad\Rightarrow\quad \cos(kl) = 0 \tag{3}$$

Der Kosinus ist Null bei $kl = \frac{\pi}{2}$. Die angepasste Kosinusfunktion lautet dann:

$$q(x) = q_0\cos\left(\frac{\pi}{2}\frac{x}{l}\right) \tag{4}$$

<u>Ersatzkraft</u> Da es sich um einen starren Balken handelt, kann für die Linienlast $q(x)$ eine Ersatzkraft F gefunden werden, die an der Stelle x_F angreift. Die Kraft ergibt sich aus dem Integral der Linienlast.

$$F = \int_0^l q(x)\mathrm{d}x = \int_{x=0}^l q_0\cos\left(\frac{\pi}{2}\frac{x}{l}\right)\mathrm{d}x \tag{5}$$
$$\text{Substitution } z = \frac{\pi}{2l}x \text{ und } \mathrm{d}x = \frac{2l}{\pi}\mathrm{d}z \tag{6}$$
$$= q_0\frac{2l}{\pi}\int_{z=0}^{\frac{1}{2}\pi}\cos z\mathrm{d}z = q_0\frac{2l}{\pi}\left[\sin z\right]_0^{\frac{1}{2}\pi} \tag{7}$$
$$= q_0\frac{2l}{\pi}(1-0) = q_0\frac{2l}{\pi} \tag{8}$$

Um den Angriffspunkt x_F der Ersatzkraft zu finden, fordern wir das die Momente der Streckenlast und der Ersatzkraft gleich groß sind. Wählen wir als Bezugspunkt für die Momente den Stabanfang.

$$M_F^{(0)} = M_{q(x)}^{(0)} \tag{9}$$
$$x_F F = \int_0^l xq(x)\mathrm{d}x = \int_{x=0}^l xq_0\cos\left(\frac{\pi}{2}\frac{x}{l}\right)\mathrm{d}x \tag{10}$$
$$\text{Substitution } z = \frac{\pi}{2l}x \text{ und } \mathrm{d}x = \frac{2l}{\pi}\mathrm{d}z \tag{11}$$
$$= q_0\left(\frac{2l}{\pi}\right)^2\int_{z=0}^{\frac{1}{2}\pi} z\cos z\mathrm{d}z \tag{12}$$
$$\text{Partielle Integration} \tag{13}$$
$$= q_0\left(\frac{2l}{\pi}\right)^2\left[z\sin z + \cos z\right]_0^{\frac{1}{2}\pi} \tag{14}$$
$$= q_0\left(\frac{2l}{\pi}\right)^2\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) \tag{15}$$

Mit der bereits berechneten Ersatzkraft F folgt:

$$x_F = M_F^{(0)}/F = l\left(1 - \frac{2}{\pi}\right). \tag{16}$$

Kräftegleichgewichte
in x-Richtung:

$$\sum_i F_{i,x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{A_x = 0}} \tag{17}$$

in z-Richtung:

$$\sum_i F_{i,z} = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{A_z = F = q_0 \frac{2l}{\pi}}} \tag{18}$$

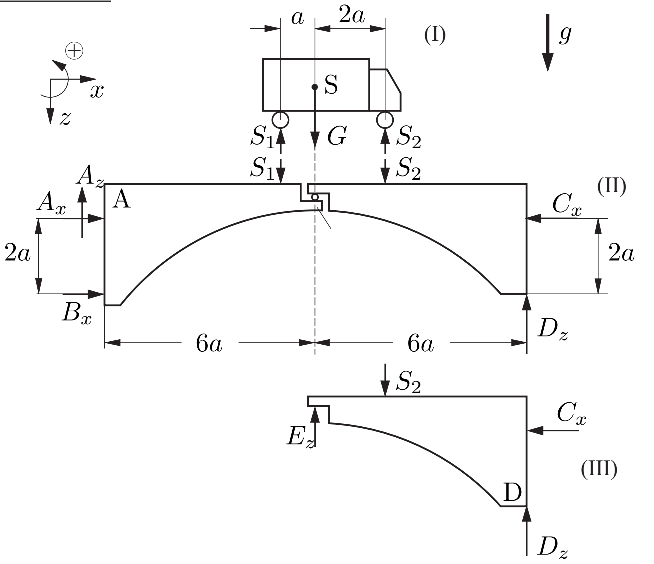
Momentengleichgewicht

$$\sum M^{(A)} = 0 = -M_A - x_F F \tag{19}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{M_A = -x_F F = -q_0 l^2 \frac{2}{\pi} \left(1 - \frac{2}{\pi}\right)}} \tag{20}$$

Aufgabe 38

Freischnitt



Für Teilkörper (I) liegen 2 GGB für 2 Unbekannte vor. (Horizontales Kräftegleichgewicht macht keine Aussage über S_1 oder S_2). Gesammtkörper (II) und Teilkörper (III) liefern 6 GGB für die 6 Unbekannten: A_x, A_z, B_x, C_x, D_z, E_z

(I)

$$\sum F_z = 0 \Rightarrow S_1 + S_2 = G \tag{21}$$

$$\sum M^{(S)} = 0 \Rightarrow S_2 \cdot 2a = S_1 \cdot a \Rightarrow S_1 = 2S_2 \tag{22}$$

$$(22) \text{ in } (21) \Rightarrow S_2 = \frac{1}{3} G \text{ und } S_1 = \frac{2}{3} G \tag{23}$$

(III)

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow C_x = 0 \tag{24}$$

$$\sum F_z = 0 \Rightarrow E_z - S_2 + D_z = 0 \tag{25}$$

$$\sum M^{(D)} = 0 \Rightarrow -E_z \cdot 6a + C_x \cdot 2a + S_2 \cdot 4a = 0 \tag{26}$$

$$(24) \text{ in } (26) \Rightarrow E_z = \frac{2}{3} S_2 = \frac{2}{9} G \tag{27}$$

$$(27) \text{ in } (25) \Rightarrow D_z = S_2 - \frac{2}{9} G = \frac{1}{9} G \tag{28}$$

(II)

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow A_x + B_x - C_x = 0 \tag{29}$$

$$\sum F_z = 0 \Rightarrow S_1 + S_2 - A_z - D_z = 0 \tag{30}$$

$$\text{mit } (28) \Rightarrow A_z = \frac{8}{9} G \tag{31}$$

$$\sum M^{(A)} = 0$$

$$\Rightarrow 2a\, B_x - 5a\, S_1 - 8a\, S_2 + 12a\, D_z = 0 \tag{32}$$

$$B_x = \frac{1}{2}\left(\frac{10}{3} + \frac{8}{3} - \frac{4}{3}\right) G = \frac{7}{3} G \tag{33}$$

$$(24) \text{ und } (33) \text{ in } (29) \Rightarrow A_x = -\frac{7}{3} G \tag{34}$$

mit der Vorgabe von $G = 90\,\text{kN}$ ergeben sich:

$$C_x = 0\,\text{kN} \tag{35}$$

$$E_z = 20\,\text{kN} \tag{36}$$

$$D_z = 10\,\text{kN} \tag{37}$$

$$B_x = 210\,\text{kN} \tag{38}$$

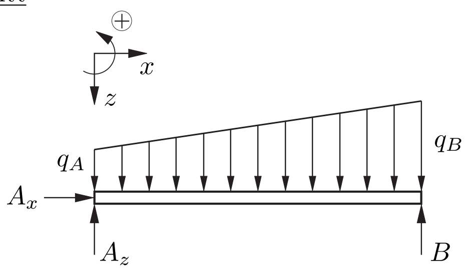
$$A_x = -210\,\text{kN} \tag{39}$$

$$A_z = 80\,\text{kN} \tag{40}$$

Hausaufgaben

Aufgabe 35

Freischnitt



Kräftegleichgewicht

In x - Richtung

$$\sum F_x = 0 = A_x \Rightarrow A_x = 0 \tag{41}$$

In y - Richtung

$$\sum F_z = 0 = -A_z - B + \int_{x=0}^{l} q(x)\mathrm{d}x \tag{42}$$

$$\Rightarrow A_z = \left(\int_0^l q(x)\mathrm{d}x\right) - B \tag{43}$$

Momentengleichgewicht um das Lager A

$$\sum M^{(A)} = 0 = -\int_0^l xq(x)\mathrm{d}x + Bl \tag{44}$$

$$\Rightarrow B = \frac{1}{l}\int_0^l xq(x)\mathrm{d}x \tag{45}$$

Ermittlung von $q(x)$

$q(x)$ ist linear, also $q(x) = ax + b$

$$\begin{cases} q(0) = q_A \\ q(l) = q_B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = q_A \\ al + b = q_B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = q_A \\ a = \dfrac{q_B - q_A}{l} \end{cases}$$

$$q(x) = \left(\frac{q_B - q_A}{l}\right)x + q_A \tag{46}$$

$$B = \frac{1}{l}\int_0^l \left[\left(\frac{q_B - q_A}{l}\right)x + q_A\right]x\,\mathrm{d}x \tag{47}$$

$$= \frac{1}{l}\left[\left(\frac{q_B - q_A}{l}\right)\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}q_A x^2\right]_0^l \tag{48}$$

$$= \frac{1}{l}\left[\left(\frac{q_B - q_A}{l}\right)\frac{l^3}{3} + \frac{1}{2}q_A l^2\right]_0^l \tag{49}$$

$$= \frac{q_B - q_A}{3}l + \frac{q_A l}{2} \tag{50}$$

$$\boxed{B = \left(\frac{1}{3}q_B + \frac{1}{6}q_A\right)\cdot l}$$

$$A_z = \int_0^l q(x)\mathrm{d}x - B \tag{51}$$

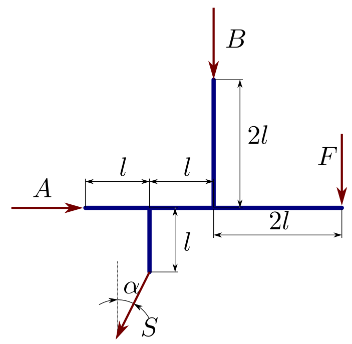
$$= \left[\left(\frac{q_B - q_A}{l}\right)\frac{x^2}{2} + q_A x\right]_0^l - B \tag{52}$$

$$= \frac{1}{2}\Big(q_B - q_A\Big)l + q_A \cdot l - \frac{1}{3}q_B l - \frac{1}{6}q_A l \tag{53}$$

$$\boxed{A_z = \left(\frac{1}{6}q_B + \frac{1}{3}q_A\right)\cdot l}$$

Aufgabe 42

(a) Freischnitt



Es gibt drei unbekannte Lagerreaktionen: A, B und S.

(b) Gleichgewichtsbedingungen

$$\sum F_x = A - S\sin\alpha = 0 \tag{54}$$

$$\sum F_y = -B - S\cos\alpha - F = 0 \tag{55}$$

$$\sum M^{(P)} = -F2l + S\cos\alpha \cdot l - S\sin\alpha \cdot l = 0 \tag{56}$$

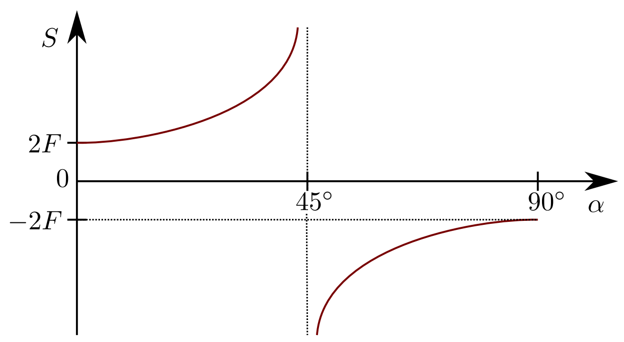
(c) Lagerreaktionen

$$(56) \Rightarrow S = \frac{2F}{\cos\alpha - \sin\alpha} \tag{57}$$

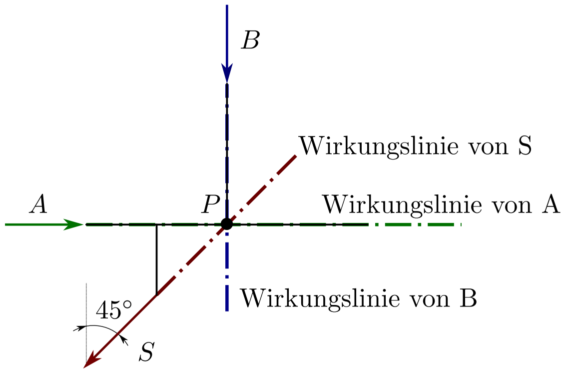
$$(54) \Rightarrow A = S\sin\alpha = \frac{2F\sin\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha} \tag{58}$$

$$(55) \Rightarrow B = -S\cos\alpha - F = -F\left(\frac{2\cos\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha} - 1\right) \tag{59}$$

(d) Skizze $S(\alpha)$



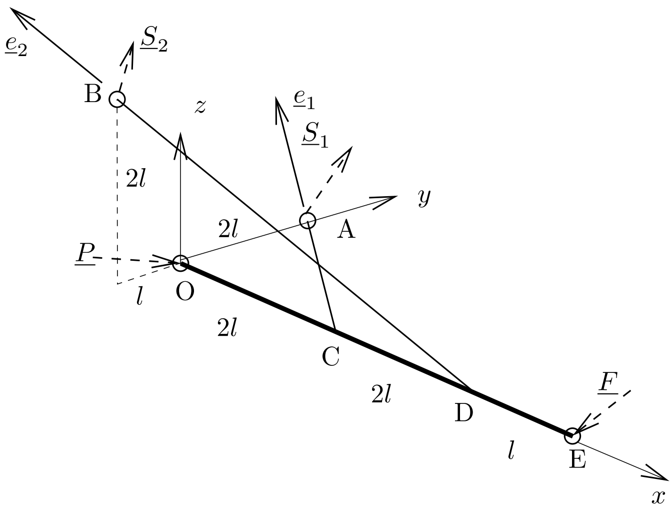
(e)



Alle drei Wirkungslinien schneiden sich im Punkt P, wenn $\alpha = 45°$ gewählt wird. Das Momentengleichgewicht liefert dann keine Aussage und das System ist nicht mehr statisch bestimmt.

Aufgabe 45

(a) Der freigeschnittene Balken mit den Seilen sieht wie folgt aus:



Sowohl die Seilkräfte $\underline{S}_1$ und $\underline{S}_2$ als auch die Kraft $\underline{P}$ haben je drei Unbekannte (S_{1x}, S_{1y}, S_{1z} und S_{2x}, S_{2y}, S_{2z} und P_x, P_y, P_z). Unsere Gleichgewichtsbedingungen aus den Kräften und Momenten liefern uns aber nur sechs Gleichungen. Wir brauchen also noch mindestens drei weitere Gleichungen.

Wir nutzen zum Aufstellen der noch fehlenden Gleichungen aus, daß die Seilkräfte immer in Richtung der Seile wirken. Die Einheitsrichtungsvektoren $\underline{e}_1$ und $\underline{e}_2$ der Seile sind nach der Geometrie

$$\underline{e}_1 = \frac{\underline{r}_A - \underline{r}_C}{\|\underline{r}_A - \underline{r}_C\|} = \frac{1}{\sqrt{8l^2}}\begin{pmatrix}-2l\\2l\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$\underline{e}_2 = \frac{\underline{r}_B - \underline{r}_D}{\|\underline{r}_B - \underline{r}_D\|} = \frac{1}{\sqrt{21l^2}}\begin{pmatrix}-4l\\-1l\\2l\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{21}}\begin{pmatrix}-4\\-1\\2\end{pmatrix}$$

Nachdem wir diese Vektoren ausgerechnet und eingesetzt haben, können wir die Seilkräfte in Abhängigkeit ihrer Beträge S_1 und S_2 schreiben. Zwar erhalten wir mit S_1 und S_2 zwei zusätzliche Unbekannte, gewinnen aber sechs Gleichungen, so daß elf Unbekannten nun zwölf Gleichungen gegenüberstehen.

$$\underline{S}_1 = S_1\underline{e}_1 = S_1\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}S_{1x}\\S_{1y}\\S_{1z}\end{pmatrix} \tag{60}$$

und

$$\underline{S}_2 = S_2\underline{e}_2 = S_2\frac{1}{\sqrt{21}}\begin{pmatrix}-4\\-1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}S_{2x}\\S_{2y}\\S_{2z}\end{pmatrix} \tag{61}$$

Nun haben wir sechs Unbekannte bestimmt und werten für die restlichen fünf die verbleibenden sechs Gleichungen aus.

Das Momentengleichgewicht um O ist

$$\sum \underline{M}^{\mathrm{O}} = \underline{0} \qquad \Rightarrow$$
$$\underline{0} = \underline{r}_C \times \underline{S}_1 + \underline{r}_D \times \underline{S}_2 + \underline{r}_E \times \underline{F} \tag{62}$$

Die Ortsvektoren sind mit Ursprung O:

$$\underline{r}_C = \begin{pmatrix}2l\\0\\0\end{pmatrix}, \quad \underline{r}_D = \begin{pmatrix}4l\\0\\0\end{pmatrix}, \quad \underline{r}_E = \begin{pmatrix}5l\\0\\0\end{pmatrix}$$

und die eingeprägte Kraft F ist

$$\underline{F} = \begin{pmatrix}0\\0\\-F\end{pmatrix}$$

also wird nach (62)

$$\begin{aligned}\underline{0} = \quad & 2l\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \times S_1\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\\ &+ 4l\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \times S_2\frac{1}{\sqrt{21}}\begin{pmatrix}-4\\-1\\2\end{pmatrix}\\ &+ 5l\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \times F\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \quad \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} &= S_1\sqrt{2}\,l\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + S_2\frac{4}{\sqrt{21}}\,l\begin{pmatrix}0\\-2\\-1\end{pmatrix}\\ &+ 5\,l\,F\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Die Koeffizienten der x-Komponenten sind alle null, so daß wir aus dieser Gleichung keine Information erhalten können, außer daß $0 = 0$ ist.

Es verbleiben für unsere fünf Unbekannten noch fünf Gleichungen. Aus dem Vergleich der y-Komponenten ergibt sich

$$0 = -S_2\frac{8}{\sqrt{21}}\,l + 5\,l\,F$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{S_2 = \frac{5}{8}\sqrt{21}\,F} \tag{63}$$

und aus dem Vergleich der z-Komponenten ergibt sich

$$0 = S_1\sqrt{2}\,l - S_2\frac{4}{\sqrt{21}}\,l$$

mit der Information aus (63)

$$\Rightarrow \quad \boxed{S_1 = \frac{5}{4}\sqrt{2}\,F} \tag{64}$$

Die gesuchten Seilkräfte ergeben sich durch Einsetzen: $\underline{S_1}$ mit (64) in (60) und $\underline{S_2}$ mit (63) in (61).

Es fehlt nun nur noch die Auflagerkraft $\underline{P}$. Das Kräftegleichgewicht ist

$$\sum \underline{F} = \underline{0} = \underline{P} + \underline{S_1} + \underline{S_2} + \underline{F}$$
$$\Rightarrow \quad \underline{P} = -\underline{S_1} - \underline{S_2} - \underline{F} \tag{65}$$

und wird mit (65), (60), (61), (64) und (63) zu

$$\underline{P} = -\frac{5}{4}\,F\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} - \frac{5}{8}\,F\begin{pmatrix}-4\\-1\\2\end{pmatrix} - F\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}$$

und nach Ausrechnen

$$\boxed{\underline{P} = \frac{1}{8}\,F\begin{pmatrix}30\\-5\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}P_x\\P_y\\P_z\end{pmatrix}}$$