Tutorium

Aufgabe 24

(a) Die x - Koordinate des Flächenmittelpunktes:

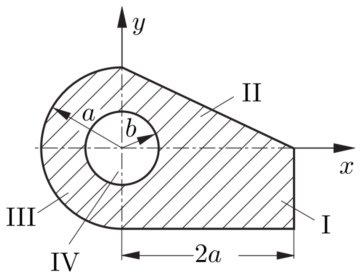
$$x_F := \frac{\int_A x\,dA}{\int_A dA} \qquad \text{(MP1)}$$

Die y - Koordinate des Flächenmittelpunktes:

$$y_F := \frac{\int_A y\,dA}{\int_A dA} \qquad \text{(MP2)}$$

1. Schritt:

Die Gesamtfläche A in Teilflächen A_i zerlegen, deren Mittelpunkte $(x_{si}\,,\,y_{si})$ bekannt oder einfach zu berechnen sind.



2. Schritt:

Die Lage des resultierenden Mittelpunktes berechnen, mit:

$$x_F = \frac{\sum_i x_{si}A_i}{\sum_i A_i} \quad ; \quad y_F = \frac{\sum_i y_{si}A_i}{\sum_i A_i} \qquad (1)$$

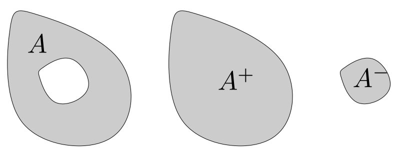
Zur besseren Übersicht ist es sinnvoll eine Tabelle zu erstellen:

	A_i	x_{si}	y_{si}	$x_{si}A_i$	$y_{si}A_i$
I	$2a^2$	a	$-\frac{a}{2}$	$2a^3$	$-a^3$
II	a^2	$\frac{2}{3}a$	$\frac{a}{3}$	$\frac{2}{3}a^3$	$\frac{a^3}{3}$
III	$\frac{\pi}{2}a^2$	$-\frac{4}{3}\frac{a}{\pi}$	0	$-\frac{2}{3}a^3$	0
IV	$-\pi b^2$	0	0	-0	-0
$\sum$	$(3+\frac{\pi}{2})a^2 - \pi b^2$	**XX**	**XX**	$2a^3$	$-\frac{2}{3}a^3$

Hierbei ist zu beachten, dass bei Teilkörper IV die Fläche A mit negativem Vorzeichen versehen ist. Ebenso sind die Werte $x_{si}A_i$ und $y_{si}A_i$ mit negativen Vorzeichen versehen (was jedoch in diesem Fall (da der Ursprung im Flächenmittelpunkt von Teilfläche IV liegt) unerheblich ist).

Die negativen Vorzeichen resultieren aus folgender Überlegung:

$$\int_{A=A^+-A^-} \psi dA = \int_{A^+} \psi dA - \int_{A^-} \psi dA$$



wobei man für ψ sowohl x als auch 1 einsetzen kann. Sei A nun eine Fläche, deren Mittelpunkt nach den Formeln (MP1) bzw. (MP2) zu berechnen ist, so gilt:

$$x_F = \frac{\int_{A^+} x\,dA - \int_{A^-} x\,dA}{\int_{A^+} dA - \int_{A^-}\,dA} \qquad (2)$$

Und für den Fall, dass die Mittelpunkte der **Teil**flächen bekannt wären (x^+ bzw. x^-), ergibt dies

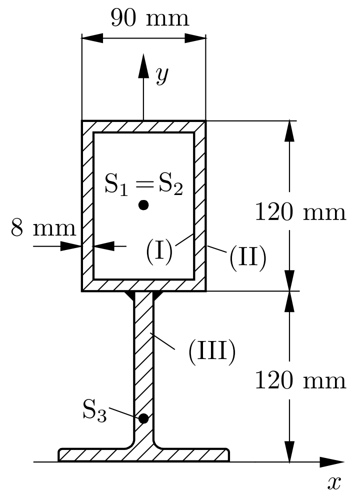
$$x_F = \frac{x^+A^+ - x^-A^-}{A^+ - A^-} \qquad (3)$$

3. Schritt:

Aus Gleichung (1) ergibt sich:

$$x_F = 2\frac{a^3}{(3+\frac{\pi}{2})a^2 - \pi b^2} \quad ; \quad y_F = -\frac{2}{3}\frac{a^3}{(3+\frac{\pi}{2})a^2 - \pi b^2}\ .$$

(b) Hier lässt sich der Querschnitt in 3 Teile zerlegen:



I	inneres Rechteck	(104 mm × 74 mm)	(–)
II	äußeres Rechteck	(120 mm × 90 mm)	(+)
III	Profil 120		(+)

	$\frac{x_{si}}{\text{mm}}$	$\frac{y_{si}}{\text{mm}}$	$\frac{A_i}{\text{mm}^2}$	$\frac{x_{si}A_i}{\text{mm}^3}$	$\frac{y_{si}A_i}{\text{mm}^3}$
I	0	180	-7696	0	-1385280
II	0	180	10800	0	1944000
III	0	32,8	2960	0	97088
$\sum$	**XX**	**XX**	6064	0	655808

Aus Gleichung (1) ergibt sich:

$$x_F = 0 \quad ; \quad y_F \approx 108{,}15\text{mm}\ .$$

Aufgabe 31

Vorbetrachtung

Bei inhomogenen Körpern (z.B. Körpern aus verschiedenen Materialien) fällt der Massenmittelpunkt im allgemeinen nicht mit dem Volumenmittelpunkt zusammen. Wie in dieser Aufgabe, muss dann von der Definition für den Massenmittelpunkt x_S ausgegangen werden:

$$x_S = \frac{\int \rho x dV}{\int \rho dV} \quad , \tag{4}$$

hier für die obere und untere Körperhälfte:

$$x_S = \frac{\rho_o \int_o x dV_o + \rho_u \int_u x dV_u}{\rho_u \int_o dV_o + \rho_u \int_u dV_u} \quad .$$

Für konstante Scheibentiefe h kann das Volumenintegral zu einem Flächenintegral vereinfacht werden. Zusätzlich kann das Integral über die obere Körperhälfte noch zerlegt werden. Die Aussparung wird dabei von der oberen Scheibenhälfte abgezogen (Integral 3):

$$x_S = \frac{h\left(\rho_1 \int_1 x dA_1 + \rho_2\left[\int_2 x dA_2 - \int_3 x dA_3\right]\right)}{h\left(\rho_1 \int_1 dA_1 + \rho_2\left[\int_2 dA_2 - \int_3 dA_3\right]\right)}$$

Für einfache Geometrien sind die Flächen und Flächenschwerpunkte tabelliert. Die Berechnung des Massenmittelpunktes mittels Integralen bleibt so eher die Ausnahme.

An dieser Stelle kann (4) und $A = \int dA$ für die einzelnen Körperbestandteile zur Vereinfachung genutzt werden. x_{Si} sind die einzelnen, aus Tabellen bekannten Flächenschwerpunkte. Es ergibt sich

$$x_S = \frac{\rho_1 x_{S1} A_1 + \rho_2 x_{S2} A_2 - \rho_2 x_{S3} A_3}{\rho_1 A_1 + \rho_2 A_2 - \rho_2 A_3} \tag{5}$$

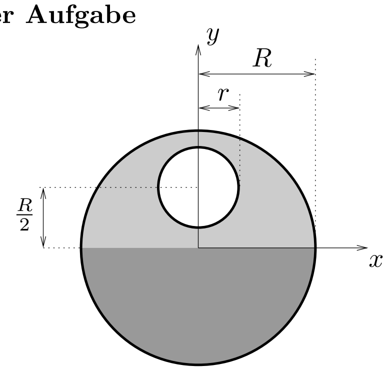
oder allgemeiner

$$x_S = \frac{\sum \rho_i x_{Si} A_i}{\sum \rho_i A_i} = \frac{\sum \gamma_i x_{Si} A_i}{\sum \gamma_i A_i} \quad , \tag{6}$$

wobei $\gamma_i = \rho_i g$ das spezifische Gewicht (die Wichte) ist.

Beim Lösen solcher Aufgaben kann man sofort auf Gleichung (6) zurückgreifen und muss nicht erst die Integralausdrücke hinschreiben.

Lösung der Aufgabe



Gesucht ist $\frac{\rho_1}{\rho_2}$, so dass

$$y_S \stackrel{!}{=} 0$$
$$0 = \frac{\sum y_i \rho_i A_i}{\sum \rho_i A_i} =: \frac{q}{p}$$

Man erkennt, dass zur Lösung der Aufgabe nur der Zähler q dieses Bruches ausgewertet werden muss und dadurch Rechnungen eingespart werden können. Zur Verbesserung der Übersichtlichkeit erfolgt die Lösung der Aufgabe mit dem Tabellenverfahren. Die Einzelwerte werden z.T. als bekannt vorausgesetzt (z.B. aus Tabellenwerken). Es wird das Koordinatensystem der Skizze zu Grunde gelegt.

	y_i	ρ_i	A_i	$y_i \rho_i A_i$
1	$-\frac{4}{3\pi}R$	ρ_1	$\frac{1}{2}\pi R^2$	$-\frac{2}{3}\rho_1 R^3$
2	$+\frac{4}{3\pi}R$	ρ_2	$\frac{1}{2}\pi R^2$	$+\frac{2}{3}\rho_2 R^3$
3	$+\frac{R}{2}$	ρ_2	πr^2	$+\frac{1}{2}\rho_2 \pi R r^2$
$\sum$				q

Der Term q muss verschwinden. Es muss gelten

$$0 = -\frac{2}{3}\rho_1 R^3 + \frac{2}{3}\rho_2 R^3 - \left(+\frac{1}{2}\rho_2 \pi R r^2\right)$$

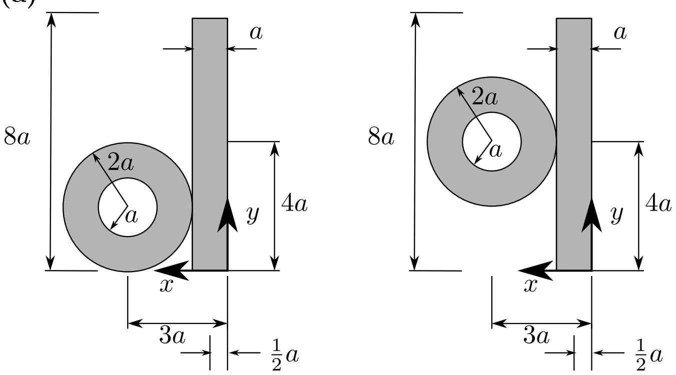
Es sei nochmals darauf hingewiesen, dass hier der dritte Summand abgezogen wird, da er für einen ausgeschnittenen Körperteil steht. Manche Autoren geben z.B. der Fläche ein negatives Vorzeichen, um diesen Umstand einzubeziehen; beides ist möglich.

$$\Rightarrow 0 = \rho_1 R^2 - \rho_2 R^2 + \frac{3}{4}\rho_2 \pi r^2$$
$$0 = \rho_1 - \rho_2\left(1 - \frac{3}{4}\pi \frac{r^2}{R^2}\right)$$
$$\Rightarrow \boxed{\frac{\rho_1}{\rho_2} = 1 - \frac{3}{4}\pi\frac{r^2}{R^2}}$$

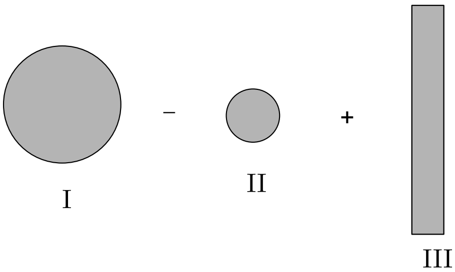
Hausaufgaben

Aufgabe 26

(a)



Die Koordinaten für das Tabellenvervahren können der Skizze entnommen werden. Der Körper setzt sich zusammen aus:



Damit ergibt sich folgende Tabelle:

	A_i	x_i	y_i	x_iA_i	y_iA_i
I	$4a^2\pi$	$3a$	$2a$	$12\pi a^3$	$8\pi a^3$
II	$-a^2\pi$	$3a$	$2a$	$-3\pi a^3$	$-2\pi a^3$
III	$8a^2$	$\frac{a}{2}$	$4a$	$4a^3$	$32a^3$
	$(8+3\pi)a^2$	-	-	$(4+9\pi)a^3$	$(32+6\pi)a^3$

Damit ergibt sich für die Schwerpunktskoordinaten:

$$x_s = \frac{\sum x_i A_i}{A_i} = \frac{4+9\pi}{8+3\pi} a \approx 1,85a \tag{7}$$

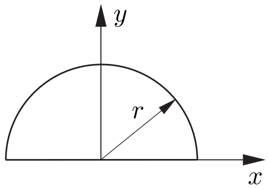
$$y_s = \frac{\sum y_i A_i}{A_i} = \frac{32+6\pi}{8+3\pi} a \approx 2,92a \tag{8}$$

(b) Im zweiten System ändert sich die x_s-Koordinate nicht. Die Kugel wird nun gerade so verschoben, dass um $y = 4a$ Symmetrie herrscht. Dies bedeutet, dass $y_s = 4a$ ist.

Aufgabe 30

Teile die Fläche in zwei Teile. x_s und y_s sind die Schwerpunktskoordinaten.

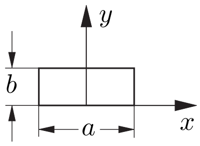
1. Halbkreis



$$(x_s = 0)\,, \quad y_{s1} = \frac{4r}{3\pi} \tag{9}$$

$$A_1 = \frac{\pi r^2}{2} \tag{10}$$

2. Rechteck



$$y_{s2} = \frac{b}{2} \tag{11}$$

$$A_2 = -a \cdot b \tag{12}$$

bekannt:

$$y_s = \frac{\sum_i y_{si} A_i}{\sum_i A_i} \tag{13}$$

$$y_s = \frac{\frac{4}{3}\frac{r}{\pi} \cdot \frac{\pi r^2}{2} - \frac{b}{2} \cdot ab}{\frac{\pi r^2}{2} - ab} = \frac{\frac{2}{3}r^3 - \frac{a}{2}b^2}{\frac{\pi r^2}{2} - ab} \tag{14}$$

Nach Aufgabenstellung: $y_s = b$

Also:

$$b = \frac{\frac{2}{3}r^3 - \frac{a}{2}b^2}{\frac{\pi r^2}{2} - ab} \tag{15}$$

nach b auflösen:

$$b^2 - \frac{\pi r^2}{a} b + \frac{4}{3} \cdot \frac{r^3}{a} = 0 \tag{16}$$

p-q-Formel:

$$b_{1/2} = \frac{\pi r^2}{2a} \pm \sqrt{\left(\frac{\pi r^2}{2a}\right)^2 - \frac{4}{3} \cdot \frac{r^3}{a}} \tag{17}$$

einsetzen von $a = \frac{9\pi^2 r}{64}$ ergibt:

$$b_1 = \frac{48}{9\pi} r \approx 1,7\, r \tag{18}$$

$$b_2 = \frac{16}{9\pi} r \approx 0,56\, r \tag{19}$$

b_2 ist richtig, da $b_1 > r$.
