

Tutorium

Aufgabe 1

Funtionen einer linearen Funktion:

$$f(x) = mx + n. \quad (1)$$

Dabei entspricht m der Steigung der Geraden $f(x)$ und n einer Verschiebungskonstante. Damit sind also zwei unbekannte Größen (m, n) zu ermitteln. Dies erfolgt durch Anpassen an gegeben Werte (meist Randwerte):

$$f_1(x=0) = m \cdot 0 + n = n \stackrel{!}{=} q_0 \Rightarrow n = q_0 \quad (2)$$

$$f_1(x=a) = m \cdot a + n = ma + n \stackrel{!}{=} q_1 \quad (3)$$

$$\Rightarrow m = \underbrace{\frac{q_1 - q_0}{a}}_{\text{mit } q_1 < q_0 \Rightarrow \text{negative Steigung}} \quad (4)$$

Damit ist also:

$$f_1(x) = \frac{q_1 - q_0}{a}x + q_0 \quad (5)$$

Funtionen einer quadratischen Funktion:

$$f(x) = px^2 + qx + r. \quad (6)$$

Es sind also drei Faktoren (p, q, r) unbestimmt.

Bei $x = 0$ findet man:

$$f_2(x=0) = p \cdot 0^2 + q \cdot 0 + r \stackrel{!}{=} q_1 \Rightarrow r = q_1 \quad (7)$$

Keine Steigung bei $x = a/2$

$$f_2'(x=a/2) := \left. \frac{df_2(x)}{dx} \right|_{x=a/2} = (2px + q)|_{x=a/2} \quad (8)$$

$$= 2p \frac{a}{2} + q \stackrel{!}{=} 0 \quad (9)$$

$$\Rightarrow q = -pa \quad (10)$$

$$f_2(x=a/2) = p \left(\frac{a}{2}\right)^2 + q \frac{a}{2} + r = pa^2 \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) + q_1 \stackrel{!}{=} q_0 \quad (11)$$

$$\Rightarrow p = -4 \frac{q_0 - q_1}{a^2} \quad (12)$$

Man findet also:

$$f_2(x) = -4 \frac{q_0 - q_1}{a^2} (x^2 - xa) + q_1 \quad (13)$$

Funtionen einer Sinusfunktion:

$$f(x) = A \sin(\omega x + \phi) + B. \quad (14)$$

B ist die Verschiebung parallel zur x -Achse und daher ist $B = q_1$.

A ist die Amplitude und damit gilt $A = q_0 - q_1$. ω ist die Schwingfrequenz, Sie ergibt sich aus $T = \frac{2\pi}{\omega}$, wobei T die Periode der Funktion ist. Daher ist

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2a \Rightarrow \omega = \frac{\pi}{a} \quad (15)$$

Schließlich ist ϕ die Phasenverschiebung. Es gilt

$$f(x_0) = A \sin(\omega x_0 + \phi) + B = B. \quad (16)$$

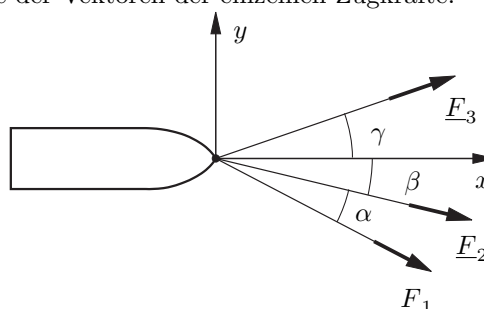
Daher muss gelten, dass $\omega x_0 + \phi = \pi$ ist. Für die dargestellte Funktion ist $x_0 = \frac{a}{2}$ und damit ergibt sich $\phi = \frac{\pi}{2}$. Die gesuchte Funktion ist damit

$$f_3(x) = (q_0 - q_1) \sin\left(\frac{\pi}{a}x + \frac{\pi}{2}\right) + q_1 \quad (17)$$

$$= (q_0 - q_1) \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) + q_1. \quad (18)$$

Aufgabe 5

Der Vektor der resultierenden Zugkraft \underline{F}_{res} ist gleich der Summe der Vektoren der einzelnen Zugkräfte.



$$\underline{F}_{res} = \underline{F}_1 + \underline{F}_2 + \underline{F}_3 \quad (19)$$

Die x - und y -Komponenten der Einzelkräfte berechnen sich wie folgt:

$$F_{1,x} = F \cos(\alpha + \beta) \quad F_{1,y} = -F \sin(\alpha + \beta)$$

$$F_{2,x} = F \cos \beta \quad F_{2,y} = -F \sin \beta$$

$$F_{3,x} = F \cos \gamma \quad F_{3,y} = F \sin \gamma$$

Eingesetzt in Gleichung (19):

$$\begin{aligned} \underline{F}_{res} &= \underline{F}_1 + \underline{F}_2 + \underline{F}_3 \\ &= (F_{1,x} + F_{2,x} + F_{3,x})\underline{e}_x + (F_{1,y} + F_{2,y} + F_{3,y})\underline{e}_y \\ &= F(\cos(\alpha + \beta) + \cos \beta + \cos \gamma)\underline{e}_x \\ &\quad + F(-\sin(\alpha + \beta) - \sin \beta + \sin \gamma)\underline{e}_y \\ &\approx 56,616\text{kN } \underline{e}_x - 5,085\text{kN } \underline{e}_y \end{aligned}$$

Die resultierende Kraft aller drei Schlepper ist der Betrag dieses Vektors:

$$\begin{aligned} F_{res} &= |\underline{F}_{res}| = \sqrt{F_{res,x}^2 + F_{res,y}^2} \\ &\approx 56,844\text{kN} \end{aligned}$$

Der Winkel δ , den die resultierende Kraft F_{res} mit der x -Achse einschließt ergibt sich aus

$$\begin{aligned} \tan \delta &= \frac{F_{res,y}}{F_{res,x}} \\ \delta &= \arctan\left(\frac{F_{res,y}}{F_{res,x}}\right) \quad (20) \end{aligned}$$

$$\approx -5,1^\circ \quad (21)$$

Hausaufgaben

Aufgabe 3

	Präsens	Imperfekt
ich	leite ab	leitete ab
du	leitest ab	leitetest ab
er/sie/es	leitet ab	leitete ab
wir	leiten ab	leiteten ab
ihr	leitet ab	leitetet ab
sie	leiten ab	leiteten ab
	Konjunktiv I	Konjunktiv II
ich	leite ab	leitete ab
du	leitest ab	leitetest ab
er/sie/es	leite ab	leitete ab
wir	leiten ab	leiteten ab
ihr	leitet ab	leitetet ab
sie	leiten ab	leiteten ab

Hilfsverb: haben

Partizip II: abgeleitet

Aufgabe 7

Zuerst werden die Vektoren mit den Beträgen F_1 bis F_4 mathematisch beschrieben. Dazu kann man die Darstellung

$$\vec{F}_i = F_i \vec{e}_i \quad (22)$$

verwenden, wobei \vec{e}_i den normierten Richtungsvektor des Vektors \vec{e}_i mit Betrag F_i repräsentiert. Der Richtungsvektor des Vektors \vec{F}_i lässt sich gemäß der Aufgabenstellung aus den Differenzvektoren

$$\vec{r}_{i5} := \overrightarrow{P_5 P_i} = \overrightarrow{O P_i} - \overrightarrow{O P_5} \quad (23)$$

berechnen, die durch Ihren Betrag

$$|\vec{r}_{i5}| = \sqrt{r_{i5,x}^2 + r_{i5,y}^2} \quad (24)$$

dividiert werden müssen, um Einheitsvektoren zu sein. Folglich gilt:

$$\vec{e}_i = \frac{\vec{r}_{i5}}{|\vec{r}_{i5}|} \quad (25)$$

Diese Rechnung ergibt für das konkrete Beispiel:

$$\vec{r}_{15} := \overrightarrow{P_5 P_1} = \overrightarrow{O P_1} - \overrightarrow{O P_5} = 4\vec{e}_x + 4\vec{e}_y$$

$$|\vec{r}_{15}| = \sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{32}$$

$$\vec{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_x + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_y$$

$$\vec{r}_{25} := \overrightarrow{P_5 P_2} = \overrightarrow{O P_2} - \overrightarrow{O P_5} = 1\vec{e}_x + 6\vec{e}_y$$

$$|\vec{r}_{25}| = \sqrt{1^2 + 6^2} = \sqrt{37}$$

$$\vec{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{37}}\vec{e}_x + \frac{6}{\sqrt{37}}\vec{e}_y$$

$$\vec{r}_{35} := \overrightarrow{P_5 P_3} = \overrightarrow{O P_3} - \overrightarrow{O P_5} = -3\vec{e}_x + 5\vec{e}_y$$

$$|\vec{r}_{35}| = \sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{34}$$

$$\vec{e}_3 = -\frac{3}{\sqrt{34}}\vec{e}_x + \frac{5}{\sqrt{34}}\vec{e}_y$$

$$\vec{r}_{45} := \overrightarrow{P_5 P_4} = \overrightarrow{O P_4} - \overrightarrow{O P_5} = -5\vec{e}_x - 1\vec{e}_y$$

$$|\vec{r}_{45}| = \sqrt{5^2 + 1^2} = \sqrt{26}$$

$$\vec{e}_4 = -\frac{5}{\sqrt{26}}\vec{e}_x - \frac{1}{\sqrt{26}}\vec{e}_y$$

Der (resultierende) Summenvektor ergibt sich dann zu:

$$\begin{aligned} \vec{F}_{res} &= \sum_{i=1}^4 \vec{F}_i = F_1 \vec{e}_1 + F_2 \vec{e}_2 + F_3 \vec{e}_3 + F_4 \vec{e}_4 \\ &\approx -52,27\vec{e}_x + 86,49\vec{e}_y \end{aligned}$$

mit dem Winkel

$$\begin{aligned} \tan \alpha &= \frac{F_{res,y}}{F_{res,x}} \\ \alpha &\approx 121,15^\circ \end{aligned}$$

Hinweis: Eintippen in den Taschenrechner liefert zunächst $\alpha = -58,85^\circ$. Am Vorzeichen der Komponenten des Summenvektors sieht man aber, dass er in den 2. Quadranten zeigt, und damit kann nur $\alpha = -58,85^\circ + 180^\circ = 121,15^\circ$ der richtige Winkel sein. Beide Werte liefern den gleichen tan-Wert.

Aufgabe 9

(a) Kräfte in vektorieller Schreibweise

$$\underline{F}_1 = -F_1 \cos \alpha \underline{e}_x + F_1 \sin \alpha \underline{e}_y$$

$$\underline{F}_2 = F_2 \cos \beta \underline{e}_x + F_2 \sin \beta \underline{e}_y$$

(b) resultierende Kraft

$$\begin{aligned} \underline{F} &= \underline{F}_1 + \underline{F}_2 \\ &= (-F_1 \cos \alpha + F_2 \cos \beta) \underline{e}_x + (F_1 \sin \alpha + F_2 \sin \beta) \underline{e}_y \end{aligned}$$

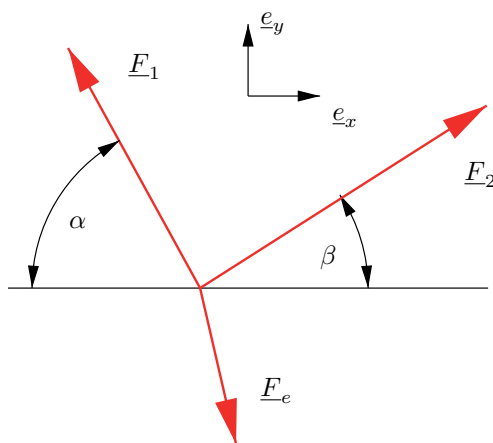
Betrag

$$\begin{aligned} F &= |\underline{F}| \\ &= \sqrt{(-F_1 \cos \alpha + F_2 \cos \beta)^2 + (F_1 \sin \alpha + F_2 \sin \beta)^2} \end{aligned}$$

Richtung (Winkel γ gegenüber der positiven x -Richtung)

$$\tan \gamma = \frac{F_1 \sin \alpha + F_2 \sin \beta}{-F_1 \cos \alpha + F_2 \cos \beta}$$

(c) Lagerkraft



$$\begin{aligned} \underline{F}_e &= -\underline{F} \\ &= (F_1 \cos \alpha - F_2 \cos \beta) \underline{e}_x - (F_1 \sin \alpha + F_2 \sin \beta) \underline{e}_y \end{aligned}$$

(d) Damit Lagerkraft nur in y -Richtung wirkt, muss die x -Komponente der Kraft verschwinden:

$$F_1 \cos \alpha - F_2 \cos \beta = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos \alpha = \frac{F_2}{F_1} \cos \beta$$

Zahlenwerte: $\alpha \approx 46^\circ$