Tutorium

Aufgabe 157

Differentialgleichung für das Knickproblem:

$$w''''(x) + \lambda^2 w''(x) = 0 \quad \text{mit } \lambda^2 = \frac{F}{EI} \tag{1}$$

Allg. Lösung:

$$w(x) = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x + C\lambda x + D \tag{2}$$

(a)

$$w(l) = 0 \qquad M(l) = 0 \tag{3}$$

$$\varphi(0) = 0 \qquad Q(0) = kw(0) \tag{4}$$

(b) Mit den Abkürzungen

$$c := \cos\lambda l\ , \quad s := \sin\lambda l \tag{5}$$

ergibt sich aus den Randbedingungen

$$\begin{bmatrix} c & s & \lambda l & 1 \\ c & s & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ k & -EI\lambda^3 & 0 & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{6}$$

Nichttriviale Lösung aus $\det M = 0$:

$$-k\sin(\lambda l) + (\lambda l k - EI\lambda^3)\cos(\lambda l) = 0 \tag{7}$$

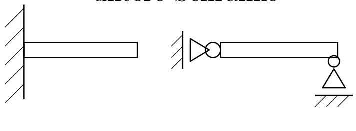
(c) $k \to 0$:

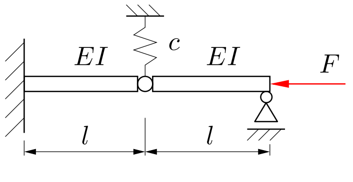
$$\cos(\lambda l) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \frac{\pi}{2l} \quad \Rightarrow \quad F_{\text{krit}} = \frac{\pi^2}{4}\frac{EI}{l^2} \tag{8}$$

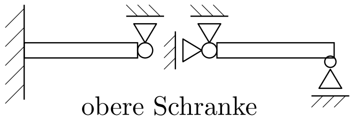
Aufgabe 154

(a) Für den linken Bereich des Stabes ergeben sich die Euler-Fälle 1 und 3 als Schranken, für den rechten Bereich bewegt sich die Knicklast zwischen 0 und dem Euler-Fall 1, was also hier maßgebend wäre. (Anmerkung zu der Schranke 0: Sei die Feder unendlich weich, so wird das Gelenk nur durch den linken Stab gestützt. Dessen Einfluß wollen wir vernachlässigen (Abschätzung) und erhalten somit ein frei bewegliches Loslager. Dieses System ist jedoch kinematisch unbestimmt, und demnach die Knicklast 0.)

untere Schranke







obere Schranke

Damit liegt die Knicklast im Bereich

$$0 \le F_k \le \frac{EI\pi^2}{\ell^2}$$

(b) Die (homogene) Knickdifferentialgleichung lautet für einen Bereich i:

$$w_i^{IV} + \alpha_i^2 w^{II} = 0 \tag{9}$$

$$\text{mit } \alpha_i^2 = \frac{F_i}{(EI)_i} \tag{10}$$

Die Lösung hierfür

$$w_i(x) = A_i\cos(\alpha_i x) + B_i\sin(\alpha_i x) + C_i\alpha_i x + D_i \tag{11}$$

$$\psi_i(x) = -w_i^I(x) = -A_i\alpha_i\sin(\alpha_i x) + B_i\alpha_i\cos(\alpha_i x) + C_i\alpha_i \tag{12}$$

$$-\frac{1}{(EI)_i}M(x) = w_i^{II}(x) = -A_i\alpha_i^2\cos(\alpha_i x) - B_i\alpha_i^2\sin(\alpha_i x) \tag{13}$$

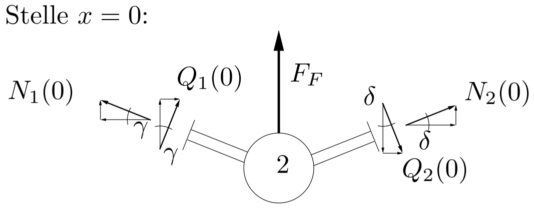
$$-\frac{1}{(EI)_i}F(x) = w_i^{III}(x) = A_i\alpha_i^3\sin(\alpha_i x) - B_i\alpha_i^3\cos(\alpha_i x) \tag{14}$$

Zur Lösung des Problems müssen für jeden Bereich 4 Rand-, bzw. Übergangsbedingungen gefunden werden: An der Stelle $x = -\ell$:

$$w_1(-\ell) = 0 \tag{15}$$

$$\psi_1(-\ell) = 0 \tag{16}$$

An der Stelle $x = 0$:



mit $N_1(0) = N_2(0) = -F$ (beachte hier theoretischen Hintergrund: Terme höherer Ordnung werden vernachlässigt, daher folgt in der Herleitung der DGL aus GG und RB, daß die Normalkraft gleich der äußeren Belastung ist) und $\gamma = w_1'(0)$, $\delta = -w_2'(0)$

$$w_1(0) = w_2(0) \tag{17}$$

$$M_1(0) = 0 \tag{18}$$

$$M_2(0) = 0 \tag{19}$$

$$\begin{aligned} \sum F_V &= Q_1(0)\cdot\cos\gamma + F_F - Q_2(0)\cdot\cos\delta \\ &\quad + N_1(0)\sin\gamma + N_2(0)\sin\delta \\ &\overset{\text{lin}}{=} Q_1(0) - Q_2(0) + c_F w(0) - F[w_1'(0) - w_2'(0)] \end{aligned} \tag{20}$$

An der Stelle $x = \ell$:

$$w_2(\ell) = 0 \tag{21}$$

$$M_2(\ell) = 0 \tag{22}$$

Einsetzen der Randbedingungen in die Lösung Gl. 11-14 (mit der Vereinfachung $\alpha^2 = \frac{F}{EI}$, weil F, EI in beiden Bereichen gleich groß):

$$A_1 \cos(-\alpha\ell) + B_1 \sin(-\alpha\ell) - C_1\alpha\ell + D_1 = 0 \quad (23)$$
$$-A_1\alpha \sin(-\alpha\ell) + B_1\alpha\cos(-\alpha\ell) + C_1\alpha = 0 \quad (24)$$
$$A_1 + D_1 = A_2 + D_2 \quad (25)$$
$$A_1 = 0 \quad (26)$$
$$A_2 = 0 \quad (27)$$
$$EI(B_1\alpha^3) - EIB_2\alpha^3 + c_F(A_1 + D_1) - F(B_1\alpha + C_1\alpha) + F(B_2\alpha + C_2\alpha) = 0$$
$$\Leftrightarrow B_1\alpha^3 - B_2\alpha^3 + \frac{c_F}{EI}(A_1 + D_1) + \alpha^3(-B_1 - C_1 + B_2 + C_2) = 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{c_F}{EI}(A_1 + D_1) + \alpha^3(-C_1 + C_2) = 0 \quad (28)$$
$$A_2 \cos(\alpha\ell) + B_2 \sin(\alpha\ell) + C_2\alpha\ell + D_2 = 0 \quad (29)$$
$$A_2 \cos(\alpha\ell) + B_2 \sin(\alpha\ell) = 0 \quad (30)$$

Mit $\cos(x) = \cos(-x)$ und $\sin(x) = -\sin(-x)$ folgt das Gleichungssystem

$$\left(\begin{array}{cccccccc|c}
c & -s & -\alpha\ell & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
s & c & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{c_F}{EI} & 0 & -\alpha^3 & \frac{c_F}{EI} & 0 & 0 & \alpha^3 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & c & s & \alpha\ell & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & c & s & 0 & 0 & 0
\end{array}\right) \quad (31)$$

wobei hier die Abkürzungen c für $\cos(\alpha\ell)$ und s für $\sin(\alpha\ell)$ stehen

---

Hausaufgaben

Aufgabe 150

Allgemeine Differentialgleichung für Knickung:

$$w''''(x) + \lambda^2 w''(x) = 0 \quad \text{mit} \quad \lambda^2 = \frac{F}{EI}$$

Ihre allgemeine Lösung:

$$w(x) = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x + C\lambda x + D \quad (32)$$

wir benötigen davon die erste und dritte Ableitung:

$$w'(x) = -A\lambda\sin\lambda x + B\lambda\cos\lambda x + C\lambda \quad (33)$$
$$w'''(x) = A\lambda^3\sin\lambda x - B\lambda^3\cos\lambda x \quad (34)$$

Die zu diesem Problem gehörigen Randbedingungen lauten (vgl. Skizze in der Aufgabenstellung):

$$w(x = 0) = 0 \quad (35)$$
$$w'(x = 0) = 0 \quad (36)$$
$$w'(x = l) = 0 \quad (37)$$
$$Q(x = l) = 0 = w'''(x = l) \quad Q = \text{Querkraft} \quad (38)$$

Aus Gl. (32) und Gl. (35) ergibt sich Gl. (39), aus Gl. (33) und Gl. (36) ergibt sich Gl. (40):

$$A + D = 0 \quad \Leftrightarrow \quad D = -A \quad (39)$$
$$\lambda B + \lambda C = 0 \quad \Leftrightarrow \quad B + C = 0 \quad (40)$$

Gl. (33) mit Gl. (37) ergibt Gl. (41) und Gl. (34) mit Gl. (38) Gl. (42):

$$-A\sin\lambda l + B\cos\lambda l + C = 0 \quad (41)$$
$$A\sin\lambda l - B\cos\lambda l = 0 \quad (42)$$

Addition von Gl. (41) und Gl. (42) ergibt mit Gl. (40):

$$C = 0 \quad \Rightarrow \quad B = 0\,. \quad (43)$$

Mit Gl. (43) und Gl. (39) lassen sich aus Gl. (42) die Knickbedingung Gl. (44) (Eigenwertgleichung) und aus Gl. (32) die spezielle Lösung unseres Problems Gl. (45) (die Eigenform) bestimmen:

$$A\sin\lambda l = 0 \quad (44)$$
$$w(x) = A(\cos\lambda x - 1) \quad (45)$$

Eine sinnvolle Lösung findet sich mit $A \neq 0$ und $\lambda \neq 0$ aus Gl. (44):

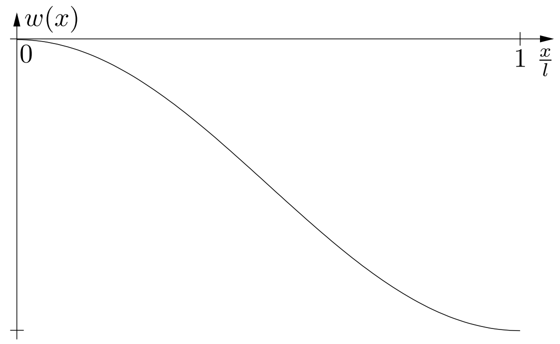
$$\sin\lambda l = 0 \quad \Rightarrow \lambda_n = n\frac{\pi}{l} \text{ mit } n = 1, 2, 3, \ldots$$

Der kleinste Eigenwert λ_1 liefert die kritische Last:

$$\lambda_1^2 = \frac{F_{\text{krit}}}{EI} \quad \Rightarrow F_{\text{krit}} = \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 EI$$

Die zugehörige Eigenform lautet (aus Gl. (45)):

$$w(x) = A\Big(\cos(\pi\frac{x}{l}) - 1\Big)$$



Aufgabe 156

(a) Eulersche Differentialgleichung fürs Knicken:

$(EIw'')'' + Fw'' = 0$
$w^{IV} + \lambda^2 w'' = 0$ mit $\lambda^2 = \frac{F}{EI}$

(b) Die Kraft aus der Temperaturerhöhung:

$\sigma_D = E\alpha_T \Delta T$
$F_D = EA_s\alpha_T\Delta T$

(c)

$$w(x) = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x + C\lambda x + D \tag{46}$$
$$w'(x) = -A\lambda\sin\lambda x + B\lambda\cos\lambda x + C\lambda \tag{47}$$
$$w''(x) = -A\lambda^2\cos\lambda x - B\lambda^2\sin\lambda x = -\frac{1}{EI}M(x) \tag{48}$$
$$w'''(x) = A\lambda^3\sin\lambda x - B\lambda^3\cos\lambda x = -\frac{1}{EI}Q(x) \tag{49}$$

Die Randbedingungen:

$$w(0) = 0 \tag{50}$$
$$w'(0) = 0 \tag{51}$$
$$w'(l) = 0 \tag{52}$$
$$Q(l) = 0 = -EIw'''(l) = 0 \tag{53}$$

aus 50 folgt: $A + D = 0 \Rightarrow D = -A$
aus 51 folgt: $B + C = 0 \Rightarrow C = -B$
aus 52 folgt: $-A\sin\lambda l + B\cos\lambda l + C \quad = 0$
aus 53 folgt: $A\sin\lambda l - B\cos\lambda l \quad = 0$

Es läßt sich also das Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} -\sin\lambda l & \cos\lambda l - 1 \\ \sin\lambda l & -\cos\lambda l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

aufstellen. Das System hat eine nichttriviale Lösung für

$$\det \begin{bmatrix} -\sin\lambda l & \cos\lambda l - 1 \\ \sin\lambda l & -\cos\lambda l \end{bmatrix} \stackrel{!}{=} 0$$

Es bleibt $\quad \sin\lambda l = 0$.
Die Lösung lautet also $\lambda l = n\pi$,
wobei das kleinst mögl. n = 1 ist.

Die kritische Kraft: $F_{krit} = EI\lambda^2 = \pi^2\frac{EI}{l^2}$

(d) Die kritische Temperatur:

$\Delta T_{krit} = \frac{F_{krit}}{EA_s\alpha_T}$

$T_2 = T_1 + \Delta T_{krit}$

$T_2 = T_1 + \frac{I\pi^2}{A_s l^2 \alpha_t}$