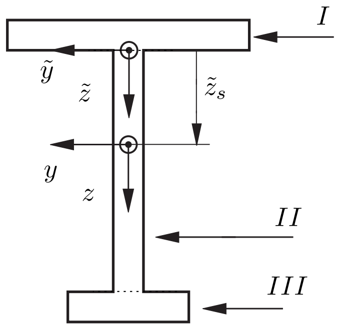
Tutorium

Aufgabe 129

Anzuwendende Formel:

$$\sigma = \frac{M_y}{I_{yy}} z - \frac{M_z}{I_{zz}} y + \frac{N}{A} \tag{1}$$

1. Ermittlung Flächenträgheitsmoment I_{yy}



Der Körper wird in drei Teilkörper zerlegt. Das Trägheitsmoment ergibt sich dann aus

$$I_{yy} = \sum_{i=1}^{3} \left[I^*_{yyi} + (\tilde{z}_{si} - \tilde{z}_s)^2 A_i \right]. \tag{2}$$

Diese Formel wird mittels Tabellenverfahren ausgewertet ($\tilde{z}_s = s = (4h-t)/10$ aus der Aufgabenstellung bekannt):

TK	A_i	$\tilde{z}_{si} - \tilde{z}_s$	$(\tilde{z}_{si} - \tilde{z}_s)^2 A_i$	I^*_{yyi}
I	ht	$-\frac{2}{5}(h+t)$	$\frac{4}{25}(h+t)^2 ht$	$\frac{1}{12} ht^3$
II	ht	$\frac{1}{10}(h+t)$	$\frac{1}{100}(h+t)^2 ht$	$\frac{1}{12} th^3$
III	$\frac{1}{2} ht$	$\frac{3}{5}(h+t)$	$\frac{9}{50}(h+t)^2 ht$	$\frac{1}{24} ht^3$
$\sum$			$\frac{7}{20}(h+t)^2 ht$	$\frac{ht}{12}(\frac{3}{2}t^2 + h^2)$

$$I_{yy} = \frac{ht}{20} \left(\frac{26}{3} h^2 + 14ht + \frac{19}{2} t^2 \right) \approx 508\ cm^4. \tag{3}$$

2. Extremwertsuche

Um die maximale Spannung zu finden setzen wir die gegebenen Schnittlasten in Gleichung (1) ein:

$$\sigma(x, z) = \frac{q_0 z}{2 I_{yy}} (x\ell - x^2) + \frac{N_0}{A\ell} x. \tag{4}$$

Es handelt sich hierbei um eine lineare Gleichung in z. Damit befinden sich die Extremwerte bei z_{oben} und z_{unten} (Randfaserabstand). In x haben wir es stattdessen mit einem quadratischen Polynom zu tun, dass im Intervall $0 < x < \ell$ oder an dessen Rand extremal wird. Zu null setzen der ersten Ableitung liefert:

$$\frac{d\sigma}{dx} = 0 \rightarrow \frac{q_0 z}{2 I_{yy}} (\ell - 2\hat{x}) + \frac{N_0}{A\ell} = 0 \tag{5}$$

$$\rightarrow \hat{x} = \frac{I_{yy}}{Az} \frac{N_0}{q_0 \ell} + \frac{\ell}{2}. \tag{6}$$

3. Zahlenwerte einsetzen

Mit den gegebenen Werten berechnen wir für die obere Randfaser:

$$z_{oben} = -(\tilde{z}_s + t) \approx -4,9\ cm \tag{7}$$

$$\hat{x}_{oben} \approx 348\ cm \tag{8}$$

$$\hat{\sigma}_{oben} \approx -58\ N/mm^2 \ \ \text{(Druck)} \tag{9}$$

und untere Randfaser:

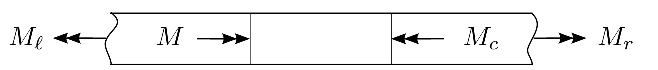
$$z_{unten} = (h+t) - \tilde{z}_s \approx 7,1\ cm \tag{10}$$

$$\hat{x}_{unten} \approx 436\ cm \tag{11}$$

$$\hat{\sigma}_{unten} \approx 133\ N/mm^2 \ \ \text{(Zug)}. \tag{12}$$

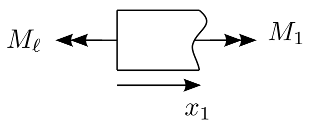
Aufgabe 157

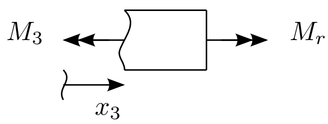
(a) Um eine Aussage über die statische Bestimmtheit des Systems zu treffen, schneiden wir das gesamte System frei. Die Momente M_ℓ und M_r sind die Lagerreaktionen der festen Einspannung, M ist das äußere Moment um die geforderte Verdrehung α zu erzeugen und M_c ist das durch die Torsionsfeder erzeugte Moment.



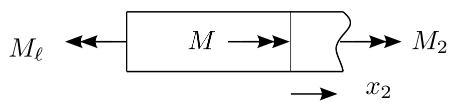
Wir sehen also zwei Unbekannte (M_ℓ und M_r) welche sich aus einer Gleichgewichtsbedingung nicht bestimmen lassen. Das System ist statisch unbestimmt.

Wir wollen nun eine Aussage über die Schnittmomente treffen. Dazu schneiden wir das System an den Stellen $0 < x < \ell$, $2\ell < x < 3\ell$



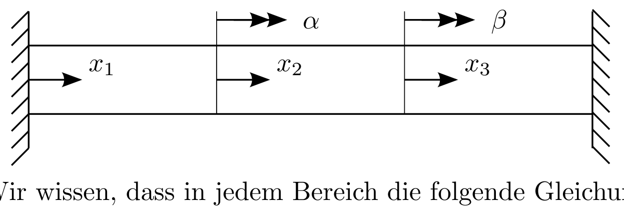


und $\ell < x < 2\ell$ frei.



Aus den Gleichgewichtsbedingungen können wir die Schnittmomente M_i nicht bestimmen. Es ist jedoch zu sehen, dass die Momente in jedem Bereich konstant sind. Sie hängen von der Lage des Schnittes nicht ab.

(b) Wir unterteilen das System nun in Bereiche. Dies geschieht an den Stellen, an denen Unstetigkeiten in der Belastung oder der Systemgeometrie auftreten. Hier bei $x = \ell$ durch das äussere Moment M und bei $x = 2\ell$ durch die Torsionsfeder. Für jeden Bereich führen wir eine neue Koordinate x_i ein, und definieren die Verdrehungen α und β gemäß der Aufgabenstellung. Zur Übersicht:



Wir wissen, dass in jedem Bereich die folgende Gleichung

$$M_i = G I_p \vartheta'_i \tag{13}$$

gilt. Da die Momente M_i konstant sind, führt integrieren auf eine lineare Funktion für die Verdrehung ϑ_i:

$$\vartheta_i(x_i) = \frac{M_i}{GI_p} x_i + c_i = m_i x_i + c_i. \tag{14}$$

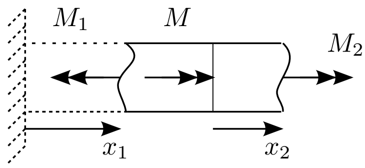
Insgesamt sind 6 Größen unbekannt: c_i und m_i bzw. M_i. Diese sind durch Rand- und Übergangsbedingungen zu bestimmen. An den Rändern ist die Verdrehung null:

$$\vartheta_1(0) = 0 \to \vartheta_1 = m_1 x_1 \tag{15}$$
$$\vartheta_3(\ell) = 0 \to \vartheta_3 = m_3(x_3 - \ell) \tag{16}$$

während sie an den Übergangsstellen stetig sein muss:

$$\vartheta_1(\ell) = \vartheta_2(0) \to \vartheta_2 = m_2 x_2 + m_1 \ell \tag{17}$$
$$\vartheta_2(\ell) = \vartheta_3(0) \to m_1 + m_2 + m_3 = 0. \tag{18}$$

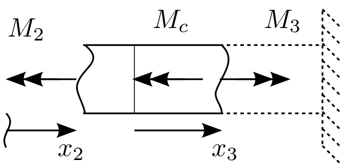
Aus dem Freischnitt bei $x = \ell$



folgt

$$M_1 = M + M_2 \tag{19}$$
$$m_1 GI_p = M + m_2 GI_p \tag{20}$$
$$\to m_1 = m_2 + \frac{M}{GI_p}. \tag{21}$$

Aus dem Freischnitt bei $x = 2\ell$



folgt

$$M_3 - M_2 = M_c = c\beta = c\vartheta_3(0) \tag{22}$$
$$m_3 GI_p - m_2 GI_p = -c\ell m_3 = -m_3 GI_p \tag{23}$$
$$\to m_2 = 2m_3. \tag{24}$$

Berechnen wir nun die Schnittmomente, indem wir Gleichung (24) und (21) in (18) einsetzen:

$$0 = 2m_2 + \frac{M}{GI_p} + m_3 = \frac{M}{GI_p} + 5m_3 \tag{25}$$
$$\to m_3 = -\frac{1}{5}\frac{M}{GI_p}, m_2 = -\frac{2}{5}\frac{M}{GI_p}, m_1 = \frac{3}{5}\frac{M}{GI_p}. \tag{26}$$

Damit sind auch die Verdrehungen bekannt, inbesondere an der Stelle $x = \ell$ erhalten wir:

$$\alpha = \vartheta_2(0) = m_1 \ell = \frac{3}{5}\frac{M\ell}{GI_p}. \tag{27}$$

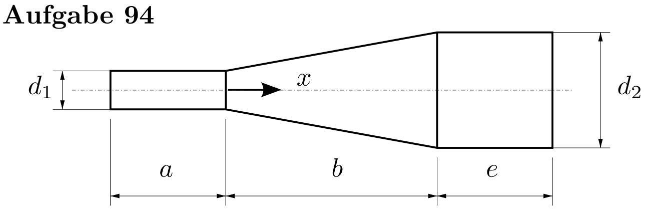
(c) Berechnen wir den Verdrehwinkel an der Stelle $x = 2\ell$

$$\beta = \vartheta_3(0) = -m_3 \ell = \frac{1}{5}\frac{M\ell}{GI_p}. \tag{28}$$

Setzen wir in α/β die berechneten Werte ein, erhalten wir die Lösung:

$$\alpha/\beta = 3 \to \beta = \frac{1}{3}\alpha. \tag{29}$$

Aufgabe 94



Bei der Bestimmung der Federkonstante einer Drehfeder wird die Annahme getroffen, dass es einen linearen Zusammenhang zwischen Torsionsmoment M und sich einstellender Verdrehung $\hat{\vartheta}$ gibt:

$$M = c\hat{\vartheta}. \tag{30}$$

In der gesamten Welle gilt, dass die Schnittmomente konstant und gleich groß sind. Mit der Gleichung

$$M = GI_p \vartheta' \tag{31}$$

folgt dann für die Differenz der Verdrehung $\hat{\vartheta}_i$ in den Bereichen mit konstantem Durchmesser:

$$\hat{\vartheta}_1 = \frac{Ma}{GI_{p1}} = \frac{32Ma}{G\pi d_1^4} \tag{32}$$
$$\hat{\vartheta}_3 = \frac{Me}{GI_{p3}} = \frac{32Me}{G\pi d_2^4}. \tag{33}$$

In dem mittlerem Bereich ändert sich der Durchmesser und das polare Flächenträgheitsmoment

$$d(x) = d_1 + \frac{d_2 - d_1}{b} x \tag{34}$$
$$I_p(x) = \frac{\pi}{32}\left(d_1 + \frac{d_2 - d_1}{b} x\right)^4. \tag{35}$$

Damit lautet Gleichung (31)

$$\vartheta_2'(x) = \frac{M}{G}\frac{32}{\pi}\left(d_1 + \frac{d_2 - d_1}{b} x\right)^{-4}, \tag{36}$$

welche einmal integriert liefert:

$$\vartheta_2(x) = -\frac{M}{G}\frac{32}{3\pi}\frac{b}{d_2 - d_1}\left(d_1 + \frac{d_2 - d_1}{b} x\right)^{-3} + c. \tag{37}$$

Die Verdrehung $\hat{\vartheta}_2$ in diesem Abschnitt folgt dann zu:

$$\hat{\vartheta}_2 = \vartheta(b) - \vartheta(0) = \frac{M}{G}\frac{32}{3\pi}\frac{b}{d_2 - d_1}\left(\frac{1}{d_1^3} - \frac{1}{d_2^3}\right). \tag{38}$$

Die Verdrehung der zusammengesetzten Welle $\hat{\vartheta}$ ist die Summe der Einzelverdrehungen:

$$\hat{\vartheta} = \hat{\vartheta}_1 + \hat{\vartheta}_2 + \hat{\vartheta}_3 \tag{39}$$
$$= M \underbrace{\frac{32}{\pi G}\left[\frac{a}{d_1^4} + \frac{1}{3}\frac{b}{d_2 - d_1}\left(\frac{1}{d_1^3} - \frac{1}{d_2^3}\right) + \frac{e}{d_2^4}\right]}_{c^{-1}}. \tag{40}$$
