Tutorium

Aufgabe 125

(a) Für das Biegemoment gibt es drei Bereiche zu untersuchen. Das System ist statisch bestimmt.

Bereich I: $\quad 0 < x < a$

$$-q_{\mathrm{I}} = Q_{\mathrm{I}}{}' \;\Rightarrow\; Q_{\mathrm{I}}{}' = 0 \;\Rightarrow\; Q_{\mathrm{I}} = c_1 \tag{1}$$
$$M_{\mathrm{I}}{}' = Q_{\mathrm{I}} \;\Rightarrow\; M_{\mathrm{I}}{}' = c_1 \;\Rightarrow\; M_{\mathrm{I}} = c_1 x + c_2 \tag{2}$$

Bereich II: $\quad a < x < l - a$

$$-q_{\mathrm{II}} = Q_{\mathrm{II}}{}' \;\Rightarrow\; Q_{\mathrm{II}}{}' = 0 \;\Rightarrow\; Q_{\mathrm{II}} = c_3 \tag{3}$$
$$M_{\mathrm{II}}{}' = Q_{\mathrm{II}} \;\Rightarrow\; M_{\mathrm{II}}{}' = c_3 \;\Rightarrow\; M_{\mathrm{II}} = c_3 x + c_4 \tag{4}$$

Bereich III: $\quad l - a < x < l$

$$-q_{\mathrm{III}} = Q_{\mathrm{III}}{}' \;\Rightarrow\; Q_{\mathrm{III}}{}' = 0 \;\Rightarrow\; Q_{\mathrm{III}} = c_5 \tag{5}$$
$$M_{\mathrm{III}}{}' = Q_{\mathrm{III}} \;\Rightarrow\; M_{\mathrm{III}}{}' = c_5 \;\Rightarrow\; M_{\mathrm{III}} = c_5 x + c_6 \tag{6}$$

Somit ist es ersichtlich, dass pro Bereich 2 Konstanten zu berechnen sind.(3 Bereiche liegen vor, d.h. $3 \cdot 2 = 6$ Konstanten: c_i mit $i = 1, 2..6$)

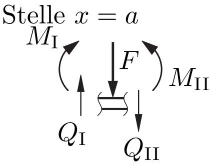
Für die Berechnung dieser 6 Konstanten braucht man 6 linear unabhängige Gleichungen. Diese Gleichungen ergeben sich aus den Rand-und Übergangsbedingungen:

Randbedinungen

$$M_{\mathrm{I}}\,(x = 0) = 0 \tag{7}$$
$$M_{\mathrm{III}}\,(x = l) = 0 \tag{8}$$

Übergangsbedingungen

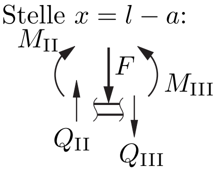
Freischnitt an der Stelle $x = a$



Die Gleichgewichtsbedingungen ergeben folgende Übergangsbedingungen:

$$M_{\mathrm{I}}\,(x = a) \;=\; M_{\mathrm{II}}\,(x = a) \tag{9}$$
$$Q_{\mathrm{I}}\,(x = a) \;=\; F + Q_{\mathrm{II}}\,(x = a) \tag{10}$$

Freischnitt an der Stelle $x = l - a$:



Die Gleichgewichtsbedingungen ergeben folgende Übergangsbedingungen:

$$M_{\mathrm{II}}\,(x = l - a) \;=\; M_{\mathrm{III}}\,(x = l - a) \tag{11}$$
$$Q_{\mathrm{II}}\,(x = l - a) \;=\; F + Q_{\mathrm{III}}\,(x = l - a) \tag{12}$$

Somit liegen jetzt 6 Gleichungen für die Berechnung der Konstanten c_i $(i = 1, 2..6)$ vor. Es können alle diese 6 Konstanten eindeutig bestimmt werden. (Die 6 Gleichungen sind linear unabhängig voneinander.)

$$\text{Aus (7) in (2) folgt}: \; c_2 = 0 \tag{13}$$
$$\text{Aus (8) in (6) folgt}: \; c_6 = -c_5 l \tag{14}$$
$$\text{Aus (9) folgt}: \; c_1 a + c_2 = c_3 a + c_4 \tag{15}$$
$$\text{Aus (10) folgt}: \; c_1 = F + c_3 \tag{16}$$
$$\text{Aus (11) folgt}: \; c_3(l - a) + c_4 = c_5(l - a) + c_6 \tag{17}$$
$$\text{Aus (12) folgt}: \; c_3 = F + c_5 \tag{18}$$

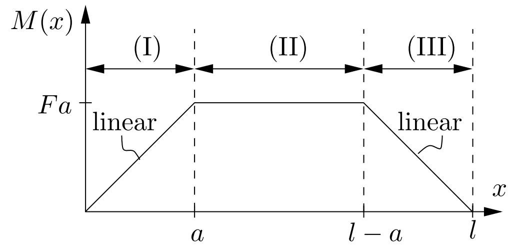
Die Lösungen dieses Gleichungssystems lauten:

$$c_1 = F \quad , \quad c_2 = 0 \quad , \quad c_3 = 0 \tag{19}$$
$$c_4 = Fa \quad , \quad c_5 = -F \quad , \quad c_6 = Fl \tag{20}$$

Somit erhält man für das jeweilige Biegemoment indem man die Konstanten einsetzt:

$$M_{\mathrm{I}}\,(x) \;=\; Fx \tag{21}$$
$$M_{\mathrm{II}}\,(x) \;=\; Fa = \text{const.} \geq 0 \tag{22}$$
$$M_{\mathrm{III}}\,(x) \;=\; F(l - x) \tag{23}$$

Graphische Darstellung:

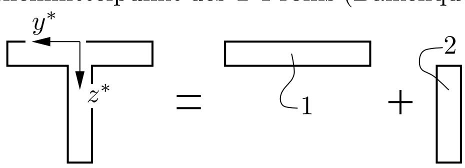


Somit ist das Biegemoment im zweiten Bereich (entlang des ganzen Bereichs) maximal und konstant.

$$M_{\max} = Fa = 3750\,\mathrm{N\ m} \tag{24}$$

Das ist der Maximalwert des Biegemomentes im Balken (um die y-Achse).

(b) Flächenmittelpunkt des T-Profils (Balkenquerschnitt)



Flächenmittelpunkt in y^*-Richtung:

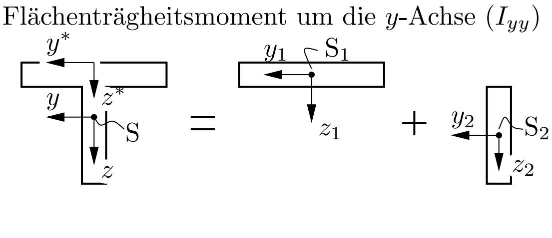
$$y_S^* = 0 \tag{25}$$

Flächenmittelpunkt in z^*-Richtung:

Körper	y_i^*	z_i^*	A_i	$y_i^* A_i$	$z_i^* A_i$
$i = 1$	0	$\frac{t}{2}$	bt	0	$\frac{1}{2}bt^2$
$i = 2$	0	$t + \frac{c}{2}$	ct	0	$ct(t + \frac{c}{2})$
$\sum$	—	—	$(b + c)t$	0	$\frac{1}{2}bt^2 + ct(t + \frac{c}{2})$

$$z_S^* = \frac{\sum_{i=1}^{2} A_i\, Z_i^*}{\sum_{i=1}^{2} A_i} = \frac{\frac{bt}{2} + c\,t + \frac{c^2}{2}}{b + c} \tag{26}$$
$$= \frac{b\,t + 2c\,t + c^2}{2(b + c)} \approx 24,642\mathrm{mm} \tag{27}$$

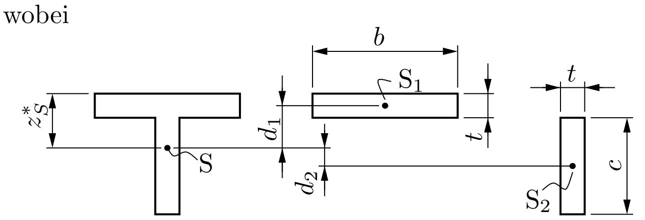
(c) Flächenträgheitsmoment um die y-Achse (I_{yy})



Mit dem Satz von Steiner:

$$I_{yy} = I_{y_1y_1} + d_1^2 A_1 + I_{y_2y_2} + d_2^2 A_2 \tag{28}$$

wobei

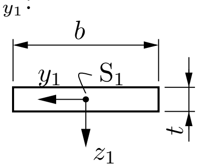


woraus ersichtlich ist, dass:

$$A_1 = b\,t\,, A_2 = c\,t\,,\; d_1 = z_S^* - \frac{t}{2} = \frac{c}{2}\,\frac{c+t}{b+c} \text{ und}$$

$$d_2 = t + \frac{c}{2} - z_S^* = \frac{b}{2}\,\frac{c+t}{b+c}$$

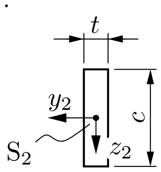
Berechnung von $I_{y_1y_1}$:



$$I_{y_1y_1} = \int_{(A_1)} z_1^2\, d\,A_1 \tag{29}$$

$$= \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} z_1^2 d\, z_1 d\, y_1 = \frac{1}{12} b\, t^3 \tag{30}$$

Berechnung von $I_{y_2y_2}$:



Analog gilt folgendes:

$$I_{y_2y_2} = \int_{(A_2)} z_2^2\, d\,A_2 \tag{31}$$

$$= \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} z_2^2 d\, z_2 d\, y_2 = \frac{1}{12} t\, c^3 \tag{32}$$

jetzt wird alles $I_{y_1y_1}, I_{y_2y_2}, A_1, A_2, d_1, d_2)$ in Gleichnung (28) gesetzt.

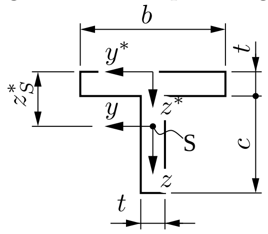
$$I_{yy} = \frac{1}{12}\, b\, t^3 + \frac{c^2}{4}\left(\frac{c+t}{b+c}\right)^2 b\, t \tag{33}$$

$$+ \frac{1}{12}\, t\, c^3 + \frac{b^2}{4}\left(\frac{c+t}{b+c}\right)^2 c\, t \tag{34}$$

$$= \frac{1}{4}\, t\left[\frac{1}{3}\,(b\, t^2 + c^3) + b\, c\,\frac{(c+t)^2}{b+c}\right] \tag{35}$$

$$\approx 1,409 \cdot 10^6 \text{mm}^4 \tag{36}$$

(d) Maximale Zug- und Druckspannung im Maschinenteil



$$\boxed{\sigma(z) = \frac{M}{I_{yy}}\, z} \tag{37}$$

(M ist hier das Moment um die y-Achse)

Flächenträgheitsmoment aus Gleichung (35):

$$I_{yy} = \frac{1}{4}\, t\left[\frac{1}{3}\big(b\, t^2 + c^3\big) + b\, c\,\frac{(c+t)^2}{b+c}\right] = \text{konst.} \tag{38}$$

$\sigma(z) = \sigma_{max}(z)$ bei $M = M_{max}$ und $z = z_{max}$.

M_{max} aus Frage **(b)** Gleichung (24):

$$M_{max} = F\, a \tag{39}$$

z_{max} kann aus der Skizze zur Geometrie abgelesen werden:

unterer Rand des T-Profils (Zugbeanspruchung): $z_{max} = t + c - z_S^*$ (40)

oberer Rand des T-Profils (Druckbeanspruchung): $z_{max} = -z_S^*$ (41)

Am unteren Rand des Profils:

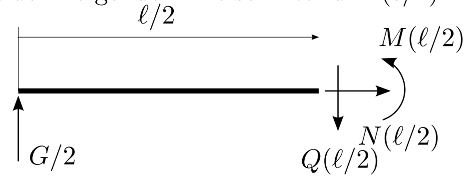
$$\sigma_{max,Zug} = \frac{Fa}{I_{yy}}\big(t + c - z_S^*\big) \approx 165,963\,\frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \tag{42}$$

Am oberen Rand des Profils:

$$\sigma_{max,Druck} = \frac{Fa}{I_{yy}}\big(-z_S^*\big) \approx -65,583\,\frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \tag{43}$$

Aufgabe 127

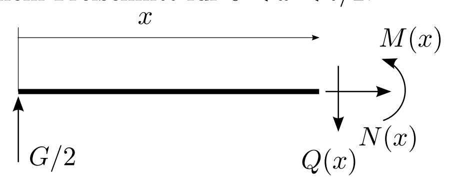
(a) Aus Symmetriegründen verteilt sich die Last G auf die beiden Lager zu gleichen Teilen. Alternativ kann die Lagerreaktion aus einem Freischnitt berechnet werden. Das Biegemoment an der Kafteinleitungsstelle $x = \ell/2$ erhalten wir aus dem folgendem Freischnitt zu $M(\ell/2) = G\ell/4$.



(b) Die maximale Normalspannung bestimmt sich zu:

$$\sigma = \frac{M}{I} z = \pm \frac{G\ell}{4} \frac{2}{bh^3} \frac{2b+h}{2} = \pm \frac{G\ell}{4} \frac{2b+h}{bh^3}. \tag{44}$$

(c) Mit einem Freischnitt für $0 < x < \ell/2$:

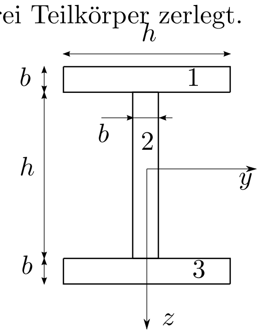


zeigt man, dass

$$M(x) = Gx/2 \text{ für } 0 < x < \ell/2. \tag{45}$$

Im Bereich $\ell/2 < x < \ell$ ist das Moment wieder linear, mit den Randwerten $M(\ell/2) = G\ell/4$ und $M(\ell) = 0$. Damit tritt das maximale Biegemoment in der Trägermitte auf.

(d) Zur Berechnung des Flächenträgheitsmomentes wird der Körper in drei Teilkörper zerlegt.



	A_i	$z_{si} = \lvert z_i - z_s \rvert$	$A_i z_{si}^2$	I_{i,y_i}
1	bh	$-\frac{1}{2}(h+b)$	$\frac{1}{4}bh(h+b)^2$	$\frac{1}{12}b^3h$
2	bh	0	0	$\frac{1}{12}bh^3$
3	bh	$\frac{1}{2}(h+b)$	$\frac{1}{4}bh(h+b)^2$	$\frac{1}{12}b^3h$
$\sum$			$\frac{1}{2}bh(b+h)^2$	$\frac{1}{12}(2b^3h + bh^3)$

Unter Verwendung des Tabellenverfahrens erhält man das Flächenträgheitsmoment zu

$$I = I_y = \frac{1}{2}bh(b+h)^2 + \frac{1}{12}(2b^3h + bh^3) \tag{46}$$

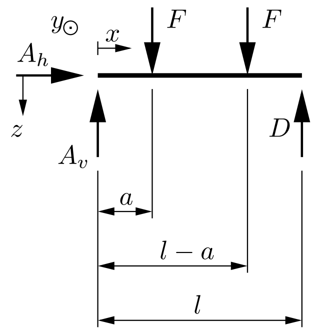
$$= \frac{2}{3}bh^3 + b^2h^2 + \frac{2}{3}b^3h \geq \frac{1}{2}bh^3. \tag{47}$$

Hausaufgaben

Aufgabe 128

Auflagerreaktionen:

Freischnitt:



Gleichgewichtsbedingungen:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \boxed{A_h = 0} \tag{48}$$

$$\sum M_y^A = 0 \Rightarrow -Fa - F(l-a) + Dl = 0 \tag{49}$$

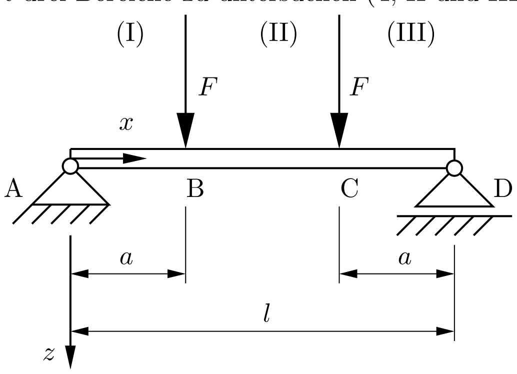
$$\Rightarrow \boxed{D = F} \tag{50}$$

$$\sum F_z = 0 \Rightarrow -A_v + 2F - D = 0 \tag{51}$$

$$\Rightarrow \boxed{A_v = F} \tag{52}$$

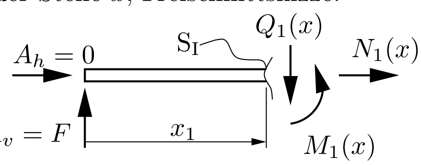
Biegemoment $M(x)$:

Es gibt drei Bereiche zu untersuchen (I, II und III)



Bereich I: $0 \leq x_1 < a$

Schnitt an der Stelle x, Freischnittsskizze:

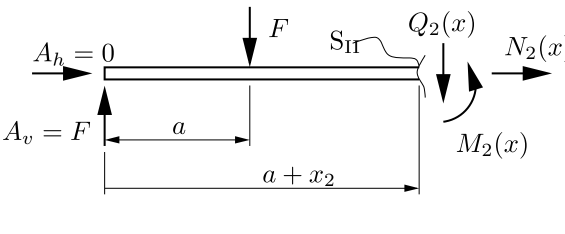


Bei S_I: positives Schnittufer!

$$\sum M_y^{(S_I)} = M_1(x) - Fx_1 = 0 \Rightarrow M_1(x) = Fx_1 \tag{53}$$

Bereich II: $0 \leq x_2 < l - 2a$

Freischnitt:



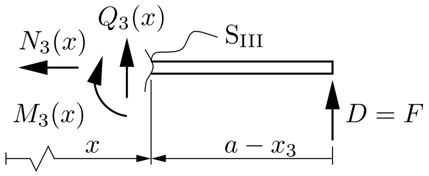
Bei S_{II}: positives Schnittufer!

$$\sum M_y^{(S_{II})} = M_2(x) - F(x_2 + a) + F(x_2) \stackrel{!}{=} 0 \tag{54}$$

$$\Rightarrow M_2(x) = Fa = \text{konst.} \tag{55}$$

Bereich III: $0 \leq x_3 \leq a$

Freischnitt:

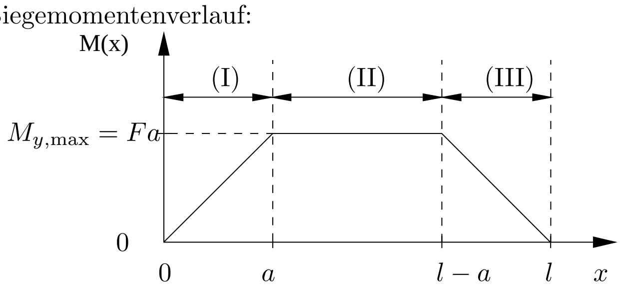


Bei S_{III}: negatives Schnittufer!

$$\sum M_y^{(S_{III})} = -M_3(x) + F(a - x_3) = 0 \tag{56}$$

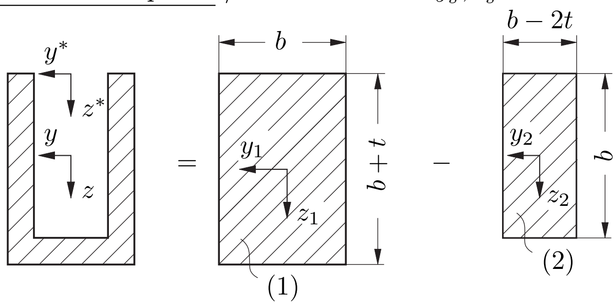
$$\Rightarrow M_3(x) = F(a - x_3) \tag{57}$$

Biegemomentenverlauf:



Das ist das maximale Biegemoment $M_{y,\max} = Fa$ tritt also im zweiten Bereich auf und ist dort konstant.

Flächenschwerpunkt / Bestimmen von y_s^*, z_s^* :



$y_s^* = 0$ (aufgrund der Symmetrie)

Tabelle für die Berechnung von z_S^*:

i	z_i^*	A_i	$z_i^* A_i$
1	$\frac{b+t}{2}$	$b(b+t)$	$\frac{b}{2}(b+t)^2$
2	$\frac{b}{2}$	$b(b-2t)$	$\frac{b^2}{2}(b-2t)$
$\sum$	—	$3bt$	$\frac{bt}{2}(4b+t)$

$$z_S^* = \frac{\sum_{i=1}^2 A_i z_i^*}{\sum_{i=1}^2 A_i} = \frac{\frac{bt}{2}(4b+t)}{3bt} \tag{58}$$

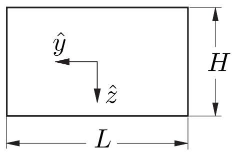
$$= \frac{4b+t}{6} \tag{59}$$

Flächenträgheitsmoment I_{yy}:

Mit dem Satz von Steiner:

$$I_{yy} = I_{y_1 y_1} + d_1^2 A_1 - I_{y_2 y_2} - d_2^2 A_2 \tag{60}$$

Für ein Rechteck der Höhe H und der Breite L gilt bzgl. der Schwerpunktskoordinaten $(\hat{y}, \hat{z})$:



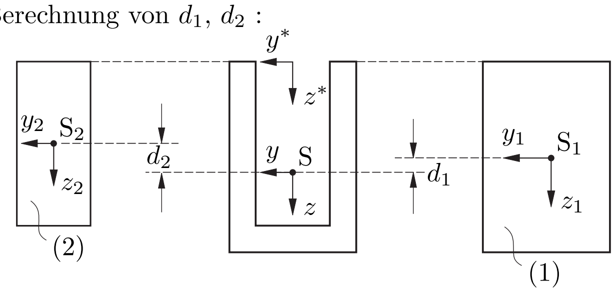
$$I_{\hat{y}\hat{y}} = \int_{(A)} \hat{z}^2 dA = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \hat{z}^2 d\hat{z} d\hat{y} = \frac{1}{12} H^3 L \tag{61}$$

Somit erhält man:

$$I_{y_1 y_1} = \frac{1}{12} \left(b + t\right)^3 b \quad \text{und} \tag{62}$$

$$I_{y_2 y_2} = \frac{1}{12} b^3 \left(b - 2t\right) \quad . \tag{63}$$

Berechnung von d_1, d_2 :



Aus der Geometrie:

$$A_1 = b\,(b+t)\,, \quad A_2 = b\,(b-2t)\,, \tag{64}$$

$$d_1 = z_S^* - \frac{b+t}{2} \quad \text{und} \quad d_2 = z_S^* - \frac{b}{2} \tag{65}$$

Einsetzen von $I_{y_1 y_1}$, $I_{y_2 y_2}$, A_1, A_2, d_1 und d_2, in die Gleichung (60) liefert:

$$\begin{aligned} I_{yy} =& \frac{1}{12}(b+t)^3 b + \left(z_S^* - \frac{b+t}{2}\right)^2 b(b+t) + \ldots \\ &- \frac{1}{12} b^3 (b-2t) - \left(z_S^* - \frac{b}{2}\right)^2 b(b-2t) \end{aligned} \tag{66}$$

$$= \frac{1}{3} b^3 t + \mathcal{O}(b^2 t^2) \quad . \tag{67}$$

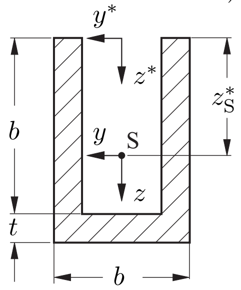
Gesucht sind die maximale Zug- und Druckspannung in dem Maschinenteil. Für die Normalspannung σ gilt für das Hauptträgheitsachsensystem (y, z):

$$\sigma(x, y, z) = \frac{M_y(x)}{I_{yy}} z - \underbrace{\frac{M_z(x)}{I_{zz}} y}_{=0,\ \text{ebener Lastfall}} + \underbrace{\frac{N(x)}{A}}_{=0,\ N_i(x)=0\ \forall i} \tag{68}$$

Daraus folgt, dass:

$$\sigma = \sigma_{\max}(z) \quad \text{bei} \quad M(x) = M(x)_{\max} \quad \text{und} \quad z = z_{\max} \tag{69}$$

(I_{yy} ist schon bekannt und konstant).



Somit ist $z_{\max}$:

$$z_{\max} = \begin{cases} b + t - z_S^* & \text{am unteren Rand des Profils: Zugspannung} \\ -z_S^* & \text{am oberen Rand des Profils: Druckspannung} \end{cases} \tag{70}$$

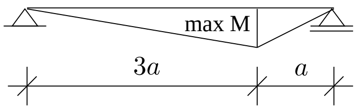
Daraus folgt, dass:

$$\sigma_{\max,\text{ Zug}} = \frac{Fa}{I_{yy}}\left(b + t - z_S^*\right) \tag{71}$$

und

$$\sigma_{\max,\text{ Druck}} = -\frac{Fa}{I_{yy}} z_S^* \quad . \tag{72}$$

Aufgabe 131



$maxM = \frac{F \cdot 3a \cdot a}{4a}$

$$M(x_1) = \frac{\frac{3}{4}Fa}{3a}x_1 = \frac{1}{4}Fx_1$$
$$M(x_2) = \frac{3}{4}Fa - \frac{3}{4}\frac{Fa}{a}x_2 = \frac{3}{4}Fa - \frac{3}{4}Fx_2$$

allgemein gilt $\sigma_x = \frac{M}{W}$

wobei das Widerstandsmoment mit $W_y = I_y/e_y = \frac{bh^2}{6}$ definiert ist.

hier:

Bereich 1:

$$W_1 = \frac{b \cdot \left(h_0 + \frac{h_0}{a}x_1\right)^2}{6}$$
$$\text{mit } h_1 = h_0 + \frac{3h_0}{3a}x_1$$
$$\sigma_{x_1} = \frac{6Fx_1}{4b \cdot \left(h_0^2 + 2\frac{h_0^2}{a}x_1 + \frac{h_0^2}{a^2}x_1^2\right)}$$
$$= \frac{3}{2}\frac{F}{bh_0^2} \cdot \frac{x_1}{1 + \frac{2}{a}x_1 + \frac{1}{a^2}x_1^2}$$

Bereich 2:

$$W_2 = \frac{b \cdot (4h_0)^2}{6} = \frac{8}{3}bh_0^2$$
$$\sigma_{x_2} = \frac{\frac{3}{4}Fa - \frac{3}{4}Fx_2}{\frac{8}{3}bh_0^2}$$
$$= \frac{9}{32}\frac{F}{bh_0^2}(a - x_2)$$

max. Normalspannung:

Das Extremum befindet sich an der Stelle, an der die Ableitung eine Nullstelle besitzt:

$$\sigma_{x,x_1} = \frac{3}{2}\frac{F}{bh_0^2}\frac{\left(1 + \frac{2}{a}x_1 + \frac{1}{a^2}x_1^2\right) - \left(\frac{2}{a} + \frac{2}{a^2}x_1\right)x_1}{\left(1 + \frac{2}{a}x_1 + \frac{1}{a^2}x_1^2\right)^2} \stackrel{!}{=} 0$$
$$\Leftrightarrow 1 + \frac{2}{a}x_1 + \frac{1}{a^2}x_1^2 - \frac{2}{a}x_1 - \frac{2}{a^2}x_1^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow 1 - \frac{1}{a^2}x_1^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow x_1^2 = a^2 \Rightarrow \underline{\underline{x_1 = a}}$$

$$\max\sigma_x = \frac{3}{2}\frac{F}{bh_0^2} \cdot \frac{a}{1 + \frac{2}{a}a + \frac{1}{a^2}a^2} = \underline{\underline{\frac{3}{8}\frac{Fa}{bh_0^2}}}$$
