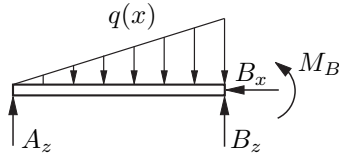


Tutorium

Aufgabe 113

(a) statische Bestimmtheit?



Die vier unbekanntes A_z , B_z , B_x , M_B der Lagerreaktionen können aus den drei Gleichgewichtsbedingungen in der Ebene nicht bestimmt werden. Das System ist statisch unbestimmt.

(b) Integration der Biegeliniendifferentialgleichung:

$$(EI w''')'(x) = q(x) = \frac{q_0}{l} x \quad (1)$$

$$(EI w'')'(x) = -Q(x) = \frac{q_0 l}{2} \left(\frac{x}{l}\right)^2 + C_1 \quad (2)$$

$$EI w''(x) = -M(x) = \frac{q_0 l^2}{6} \left(\frac{x}{l}\right)^3 + C_1 l \left(\frac{x}{l}\right) + C_2 \quad (3)$$

$$EI w'(x) = \frac{q_0 l^3}{24} \left(\frac{x}{l}\right)^4 + \frac{C_1 l^2}{2} \left(\frac{x}{l}\right)^2 + C_2 l \left(\frac{x}{l}\right) + C_3 \quad (4)$$

$$EI w(x) = \frac{q_0 l^4}{120} \left(\frac{x}{l}\right)^5 + \frac{C_1 l^3}{6} \left(\frac{x}{l}\right)^3 + \frac{C_2 l^2}{2} \left(\frac{x}{l}\right)^2 + C_3 l \left(\frac{x}{l}\right) + C_4 \quad (5)$$

Geometrische und physikalische Randbedingungen:

$$w(x=0) = 0 \quad (6)$$

$$w(x=l) = 0 \quad (7)$$

$$M(x=0) = 0 \quad (8)$$

$$w'(x=l) = 0 \quad (9)$$

$$\text{Gl. (6) in (5): } C_4 = 0 \quad (10)$$

$$\text{Gl. (8) in (3): } C_2 = 0 \quad (11)$$

$$\text{Gl. (9) in (4): } C_3 = -q_0 \frac{l^3}{24} - C_1 \frac{l^2}{2} \quad (12)$$

$$\text{Gl. (7) in (5): } 0 = \frac{q_0 l^4}{120} + C_1 \frac{l^3}{6} + C_3 l \quad (13)$$

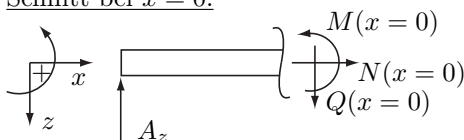
mit (12) ergibt sich:

$$C_1 = -\frac{q_0 l}{10} \quad (14)$$

$$C_3 = \frac{q_0 l^3}{120} \quad (15)$$

Auflagerreaktion in A:

Schnitt bei $x=0$:



$$\sum F_z = 0 = -A_z + Q(x=0) \quad (16)$$

$$A_z = Q(x=0)$$

aus Gl. (2):

$$Q(x) = -(EI w'')'(x) = -\frac{q_0 l}{2} \left(\frac{x}{l}\right)^2 - C_1$$

mit Gl. (14) und (16):

$$Q(x=0) = A_z = \frac{q_0 l}{10} \quad (17)$$

(c) Biegelinie bestimmen:

Gleichungen (10), (11), (14) und (15) in (5):

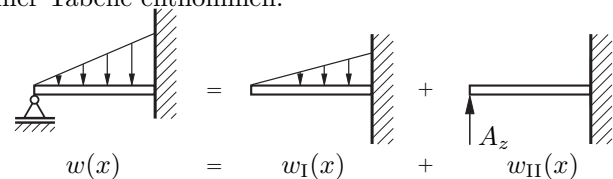
$$w(x) = \frac{q_0 l^4}{120 EI} \left[\left(\frac{x}{l}\right)^5 - 2 \left(\frac{x}{l}\right)^3 + \left(\frac{x}{l}\right) \right] \quad (18)$$

(d) Verdrehwinkel φ_A in A:

$$w'(x) = \frac{q_0 l^3}{120 EI} \left[5 \left(\frac{x}{l}\right)^4 - 6 \left(\frac{x}{l}\right)^2 + 1 \right] \quad (19)$$

$$\varphi_A = w'(x=0) = \frac{q_0 l^3}{120 EI} \quad (20)$$

Alternativ kann die Lösung auch mit dem Superpositionsprinzip erfolgen. Die Biegelinien der Teilsysteme werden einer Tabelle entnommen.



aus Doppel:

$$w_I(x) = \frac{q_0 l^4}{120 EI} \left[4 - 5 \frac{x}{l} + \left(\frac{x}{l}\right)^5 \right] \quad (21)$$

$$w_{II}(x) = \frac{(-A_z) l^3}{6 EI} \left[2 - 3 \frac{x}{l} + \left(\frac{x}{l}\right)^3 \right] \quad (22)$$

$$w(x) = \frac{q_0 l^4}{120 EI} \left[4 - 5 \frac{x}{l} + \left(\frac{x}{l}\right)^5 \right] - \frac{A_z l^3}{6 EI} \left[2 - 3 \frac{x}{l} + \left(\frac{x}{l}\right)^3 \right] \quad (23)$$

Geometrische Verträglichkeitsbedingung:

$$0 = w(x=0) = \frac{4q_0 l^4}{120 EI} - \frac{A_z l^3}{3 EI} \quad (24)$$

Daraus folgt A_z zu:

$$A_z = \frac{q_0 l^4}{30 EI} \cdot \frac{3EI}{l^3} = \frac{q_0 l}{10} \quad (25)$$

Verdrehwinkel:

mit $w'(x) = w'_I(x) + w'_{II}(x)$

$$w'(x) = \frac{q_0 l^3}{120 EI} \left[5 \left(\frac{x}{l}\right)^4 - 6 \left(\frac{x}{l}\right)^2 + 1 \right] \quad (26)$$

$$\varphi_A = w'(0) = \frac{q_0 l^3}{120 EI} \quad (27)$$

Aufgabe 117

Für das Querverformungsproblem (Biegelinie):

| x | w | w' | M | Q |
|------|-------------------------------|----------------------|-------------------------------|--------------------|
| 0 | $w_I = 0$ | - | $M_I = -c_M w'_I$ | - |
| l | $w_I = w_{II}$ | $w'_I = w'_{II}$ | $M_I = M_{II} + M_0$ | $Q_I = Q_{II}$ |
| $2l$ | $w_{II} = w_{III}$ | - | $M_{II} = 0$ $M_{III} = 0$ | $Q_{II} = Q_{III}$ |
| $3l$ | $w_{III} = 0$ $w_{IV} = 0$ | $w'_{III} = w'_{IV}$ | $M_{III} = M_{IV}$ | - |
| $4l$ | $w_{IV} = 0$ | $w'_{IV} = 0$ | - | - |

Die Integration der Biegeliniendifferentialgleichung

$$(EIw''')'(x) = q(x) \tag{28}$$

für die vier Bereiche I bis IV führt auf insgesamt 16 Integrationskonstanten. Diese lassen sich mit den oben angegebenen 16 Rand- und Übergangsbedingungen bestimmen.

Hausaufgaben

Aufgabe 111

(a) Allgemein gilt (für über den Balken konstantes I und E):

$$EIw''''(x) = q(x) \tag{29}$$

Und für die spezielle Streckenlast in dieser Aufgabe:

$$EIw''''(x) = q_0 \frac{x}{l} \tag{30}$$

(b) Um die allgemeine Lösung zu erhalten wird Gleichung (30) hochintegriert:

$$EIw'''(x) = \frac{1}{2} \frac{q_0}{l} x^2 + C_1 \tag{31}$$

$$EIw''(x) = \frac{1}{6} \frac{q_0}{l} x^3 + C_1 x + C_2 \tag{32}$$

$$EIw'(x) = \frac{1}{24} \frac{q_0}{l} x^4 + \frac{1}{2} C_1 x^2 + C_2 x + C_3 \tag{33}$$

$$EIw(x) = \frac{1}{120} \frac{q_0}{l} x^5 + \frac{1}{6} C_1 x^3 + \frac{1}{2} C_2 x^2 + C_3 x + C_4 \tag{34}$$

Die *dynamischen* Randbedingungen finden sich hier am linken Rand:

$$F_{qz}(x=0) \stackrel{!}{=} F \tag{35}$$

$$\Rightarrow EIw'''(x=0) = -F \tag{36}$$

$$M_{by}(x=0) \stackrel{!}{=} 0 \tag{37}$$

$$\Rightarrow EIw''(x=0) = 0 \tag{38}$$

Die *geometrischen* Randbedingungen finden sich hier am rechten Rand (um diese Größen später besser einsetzen zu können, werden die Gleichungen mit EI multipliziert):

$$w(x=l) \stackrel{!}{=} 0 \tag{39}$$

$$\Rightarrow EIw(x=l) = 0 \tag{40}$$

$$\varphi(x=l) \stackrel{!}{=} 0 \tag{41}$$

$$\Rightarrow EIw'(x=l) = 0 \tag{42}$$

(c) Nun werden mit Hilfe der Randbedingungen die Unbekannten ausgerechnet:

(36) in (31):

$$\Rightarrow C_1 = -F \tag{43}$$

(38) in (32):

$$\Rightarrow C_2 = 0 \tag{44}$$

(40) in (33) mit (43) und (44):

$$\Rightarrow C_3 = -\frac{1}{24} q_0 l^3 + \frac{1}{2} Fl^2 \tag{45}$$

(42) in (34) mit (43), (44) und (45):

$$\Rightarrow C_4 = \frac{1}{30} q_0 l^4 - \frac{1}{3} Fl^3 \tag{46}$$

(d) Aus (33) mit $\varphi_A = w'(x=0)$:

$$EIw'(x=0) = C_3 \tag{47}$$

Und mit (45):

$$\Rightarrow \varphi_A = \left(-\frac{1}{24} q_0 l^3 + \frac{1}{2} Fl^2 \right) \frac{1}{EI} \tag{48}$$

(e) Gefordert ist:

$$w(0) \stackrel{!}{=} 0 \tag{49}$$

Aus Gleichung (34):

$$\Rightarrow C_4 = 0 \tag{50}$$

Das in Gleichung (46) eingesetzt und nach F aufgelöst:

$$\Rightarrow F = \frac{1}{10} q_0 l \tag{51}$$

Aufgabe 114

(a) Nein, zwei einwertige Lager und ein zweiwertiges ergeben zusammen vier Auflagerreaktionskomponenten, die sich nicht allein aus den drei Gleichgewichtsbeziehungen bestimmen lassen, das System ist statisch unbestimmt. Deshalb lassen sich auch die Schnittlasten nicht allein aus den Gleichgewichtsbeziehungen bestimmen.

(b) Allgemeine Lösung der Biegeliniendifferentialgleichung:

Bereich I, $0 \leq x < \frac{2}{3}l$:

$$EIw_I''''(x) = q_0 \quad (52)$$

$$EIw_I'''(x) = q_0l \left\{ \frac{x}{l} + C_1 \right\} \quad (53)$$

$$EIw_I''(x) = q_0l^2 \left\{ \frac{1}{2} \left[\frac{x}{l} \right]^2 + C_1 \left[\frac{x}{l} \right] + C_2 \right\} \quad (54)$$

$$EIw_I'(x) = q_0l^3 \left\{ \frac{1}{6} \left[\frac{x}{l} \right]^3 + \frac{C_1}{2} \left[\frac{x}{l} \right]^2 + C_2 \left[\frac{x}{l} \right] + C_3 \right\} \quad (55)$$

$$EIw_I(x) = q_0l^4 \left\{ \frac{1}{24} \left[\frac{x}{l} \right]^4 + \frac{C_1}{6} \left[\frac{x}{l} \right]^3 + \frac{C_2}{2} \left[\frac{x}{l} \right]^2 + C_3 \left[\frac{x}{l} \right] + C_4 \right\} \quad (56)$$

Bereich II, $\frac{2}{3}l < x \leq l$:

$$EIw_{II}''''(x) = q_0 \quad (57)$$

$$EIw_{II}'''(x) = q_0l \left\{ \left[\frac{x}{l} \right] + C_5 \right\} \quad (58)$$

$$EIw_{II}''(x) = q_0l^2 \left\{ \frac{1}{2} \left[\frac{x}{l} \right]^2 + C_5 \left[\frac{x}{l} \right] + C_6 \right\} \quad (59)$$

$$EIw_{II}'(x) = q_0l^3 \left\{ \frac{1}{6} \left[\frac{x}{l} \right]^3 + \frac{C_5}{2} \left[\frac{x}{l} \right]^2 + C_6 \left[\frac{x}{l} \right] + C_7 \right\} \quad (60)$$

$$EIw_{II}(x) = q_0l^4 \left\{ \frac{1}{24} \left[\frac{x}{l} \right]^4 + \frac{C_5}{6} \left[\frac{x}{l} \right]^3 + \frac{C_6}{2} \left[\frac{x}{l} \right]^2 + C_7 \left[\frac{x}{l} \right] + C_8 \right\} \quad (61)$$

Rand- und Übergangsbedingungen:

$$w_I(0) = 0 \quad (62)$$

$$w_I\left(\frac{2}{3}l\right) = 0 \quad (63)$$

$$w_{II}\left(\frac{2}{3}l\right) = 0 \quad (64)$$

$$w_{II}(l) = 0 \quad (65)$$

$$w_I'\left(\frac{2}{3}l\right) = w_{II}'\left(\frac{2}{3}l\right) \quad (66)$$

$$M_I(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad w_I''(0) = 0 \quad (67)$$

$$M_I\left(\frac{2}{3}l\right) = M_{II}\left(\frac{2}{3}l\right) \quad \Rightarrow \quad w_I''\left(\frac{2}{3}l\right) = w_{II}''\left(\frac{2}{3}l\right) \quad (68)$$

$$M_{II}(l) = 0 \quad \Rightarrow \quad w_{II}''(l) = 0 \quad (69)$$

längerer Rechnung die folgenden Konstanten:

$$C_1 = -\frac{13}{48} \quad C_2 = 0 \quad (70)$$

$$C_3 = \frac{5}{648} \quad C_4 = 0 \quad (71)$$

$$C_5 = -\frac{23}{24} \quad C_6 = \frac{11}{24} \quad (72)$$

$$C_7 = -\frac{47}{324} \quad C_8 = \frac{11}{324} \quad (73)$$

Für die Auflagerkräfte wird der Querkraftverlauf benötigt. Mit

$$-EIw''(x) = M(x), \quad M'(x) = Q(x) \quad (74)$$

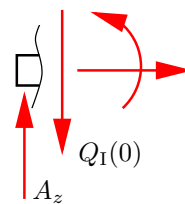
$$-EIw'''(x) = Q(x) \quad (75)$$

ergibt sich

$$Q_I(x) = q_0l \left\{ \frac{13}{48} - \left[\frac{x}{l} \right] \right\} \quad (76)$$

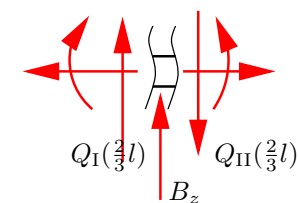
$$Q_{II}(x) = q_0l \left\{ \frac{23}{24} - \left[\frac{x}{l} \right] \right\} \quad (77)$$

Freischnitt und Gleichgewicht am linken Ende:



$$A_z = Q_I(0) = \frac{13}{48}q_0l \quad (78)$$

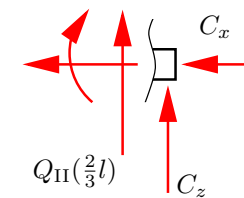
Freischnitt und Gleichgewicht am mittleren Lager:



$$B_z = Q_{II}\left(\frac{2}{3}l\right) - Q_I\left(\frac{2}{3}l\right) \quad (79)$$

$$= \frac{11}{16}q_0l \quad (80)$$

Freischnitt und Gleichgewicht am rechten Lager:



$$C_z = -Q_{II}(l) = \frac{1}{24}q_0l \quad (81)$$

(Und $C_x = 0$ aus Gleichgewicht für den gesamten Balken.)

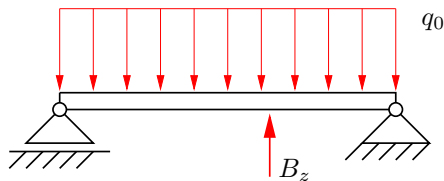
(c)

1. Statisch bestimmtes Ersatzsystem:

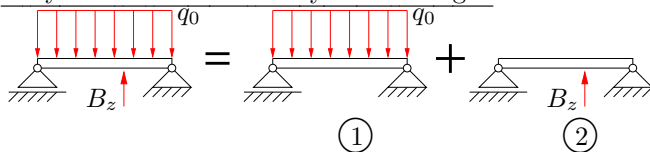
Ersetze eine Fesselung durch ihre unbekannte Reaktionslast. Diese wird nun im folgenden als äußere Last behandelt (als wenn sie bekannt wäre).

Zum Beispiel wird das mittlere Lager B durch die Kraft B_z ersetzt und wir erhalten folgendes statisch bestimmte Ersatzsystem:

Aus diesen Gleichungen erhält man durch Einsetzen nach



2. System in einfache Teilsysteme zerlegen



Superpositionsprinzip: Die Gesamtverformung ergibt sich aus der Summe der Verformung der Teilsysteme:

$$w(x) = w_1(x) + w_2(x) \quad (82)$$

3. Lösungen der einfachen Teilsysteme z.B. aus Tabellenwerk (Hütte, Dubbel o. ä.):

$$w_1(x) = \frac{q_0 l^4}{EI} \left\{ \frac{1}{24} \left[\frac{x}{l} \right]^4 - \frac{1}{12} \left[\frac{x}{l} \right]^3 + \frac{1}{24} \left[\frac{x}{l} \right] \right\} \quad (83)$$

$$\Rightarrow w_1\left(\frac{2}{3}l\right) = \frac{11}{972} \frac{q_0 l^4}{EI} \quad (84)$$

$$w_2(x) = \begin{cases} w_{2I}(x) & ; x < \frac{2}{3}l \\ w_{2II}(x) & ; x > \frac{2}{3}l \end{cases}, \text{ mit} \quad (85)$$

$$w_{2I}(x) = \frac{B_z l^3}{EI} \left\{ \frac{1}{18} \left[\frac{x}{l} \right]^3 - \frac{4}{81} \left[\frac{x}{l} \right] \right\} \text{ und} \quad (86)$$

$$w_{2II}(x) = \frac{B_z l^3}{EI} \left\{ -\frac{1}{9} \left[\frac{x}{l} \right]^3 + \frac{1}{3} \left[\frac{x}{l} \right]^2 - \frac{22}{81} \left[\frac{x}{l} \right] + \frac{4}{81} \right\} \quad (87)$$

$$\Rightarrow w_2\left(\frac{2}{3}l\right) = -\frac{4}{243} \frac{B_z l^3}{EI} \quad (88)$$

4. Geometrische Verträglichkeitsbedingung (Zwangsbedingung)

$$w\left(\frac{2}{3}l\right) = 0 \quad (89)$$

Die Auswertung der Zwangsbedingung liefert uns die unbekanntene Reaktionskraft B_z :

$$w_1\left(\frac{2}{3}l\right) + w_2\left(\frac{2}{3}l\right) \stackrel{!}{=} 0 \quad (90)$$

$$\Rightarrow B_z = \frac{11}{16} q_0 l \quad (91)$$

Das ist das gleiche Ergebnis wie in Teil (b), siehe Gl. (80).

(d) Der Verdrehwinkel oder die Neigung ist (bei kleinen Verformungen) gleich der ersten Ableitung der Biegelinie an dieser Stelle:

$$\varphi_A = w_1'(0) = \frac{q_0 l^3}{EI} C_3 = \frac{5}{648} \frac{q_0 l^3}{EI} \quad (92)$$

Aufgabe 118

(a) Momentengleichgewicht:

$$M_D - 2 \cdot \frac{L}{2} F_D = 0 \Rightarrow F_D = \frac{M_D}{L} \quad (93)$$

(b) Verdrehung φ_M in der Mitte des Radkreuzes durch Torsion zwischen Mitte und Nuß (das Ding, das die Schraube oder Mutter aufnimmt) ergibt sich aus der Material-Strukturgleichung für den Torsionsstab, das Torsionsmoment ist konstant, deshalb $\varphi' = \varphi_M / (L/2)$:

$$M_T = GI_P \varphi' \Rightarrow \varphi_M = \frac{M_T L}{2GI_P} = \frac{16M_D L}{G\pi d^4} \quad (94)$$

Daraus würde ohne Verbiegung der Hebel zum Anfassen eine Absenkung der Kraftankriffspunkte resultieren um

$$w_T = \varphi_M \frac{L}{2} = \frac{8M_D L^2}{G\pi d^4} \quad (95)$$

Dazu kommt die Verbiegung der Hebel (Kragarm mit Einzellast am Ende) von

$$w_B = \frac{1}{3} \frac{F_D (L/2)^3}{EI} = \frac{8}{3} \frac{M_D L^2}{E\pi d^4} \quad (96)$$

Also zusammen (beim Entlasten natürlich umgekehrte Richtung wie beim Belasten):

$$w = w_T + w_B = \frac{8}{\pi} \left(\frac{1}{G} + \frac{1}{3E} \right) \frac{M_D L^2}{d^4} \quad (97)$$