Prof. Popov SS11 Colloquium Mechanik für Fortgeschrittene II Aufgaben vom 14.07.2011

Parametrische Resonanz

I. Göttliche Schaukel. Berechnen Sie das unten beschriebene Weihrauchschwingen.

In der Kathedrale im spanischen Santiago de Compostela geht es regelmäßig hoch her: Jeweils vier bis acht rot gekleidete Mönche bringen einen 50 kg schweren, mit Kohlenglut und Weihrauch gefüllten Kessel zum Pendeln: Dabei bedienen sie sich allerdings nicht göttlichen Beistands, sondern irdischer Physik... Das Weihrauchfass ist an einem Flaschenzug befestigt. Der Kessel wird leicht angestoßen und dann von den Mönchen beschleunigt, die am anderen Ende des Seils ziehen. Schon nach wenigen Zügen erreicht der Kessel die erstaunliche Geschwindigkeit von bis zu 70 Kilometern pro Stunde und saust spektakulär bis auf 50 Meter Höhe ins Kirchenschiff.

Nur durch das Ziehen am Seil kommt es zu dieser starken Pendelbewegung. Dabei kommt es allerdings darauf an, genau zum richtigen Zeitpunkt am Seil zu ziehen. Der Trick liegt darin, genau in dem Moment am Seil zu ziehen, in dem das Pendel den tiefsten Punkt ("Scheitelpunkt") durchläuft. Dann lässt man es auf diesem höheren Niveau bis zum Ende der Pendelbewegung weiter schwingen. Am äußersten Punkt muss man dann das gezogene Stück Seil wieder zurückgeben, so dass beim Zurückschwingen der Scheitelpunkt wieder in ursprünglicher Höhe durchlaufen wird; dann allerdings mit deutlich höherer Geschwindigkeit. Wiederholt man diese Prozedur einige Male, erreicht der Kessel sehr schnell die hohe Geschwindigkeit

• Setzen Sie eine Schwingung mit kleinem Winkel φ voraus: Was passiert, wenn die Pendellänge am tiefsten Punkt instantan um Δl verkürzt und am Punkt des größten Ausschlags instantan wieder um Δl verlängert wird? Welche mechanischen Größen bleiben erhalten, welche nicht?
• Wie verändert sich die Energie des Pendels und der Winkel des maximalen Ausschlags nach einem Anhebevorgang? Nehmen Sie an, dass Δl eine kleine Größe ist und lassen Sie in allen Berechnungen nur die Glieder nicht höher als die erste Ordnung in Δl. Bestimmen Sie das Verhältnis der Energien für zwei aufeinander folgenden Schwingungsperioden.

II. Bestimmen Sie den Stabilitätsbereich in der $\omega-\varepsilon$-Ebene für die folgende Gleichung

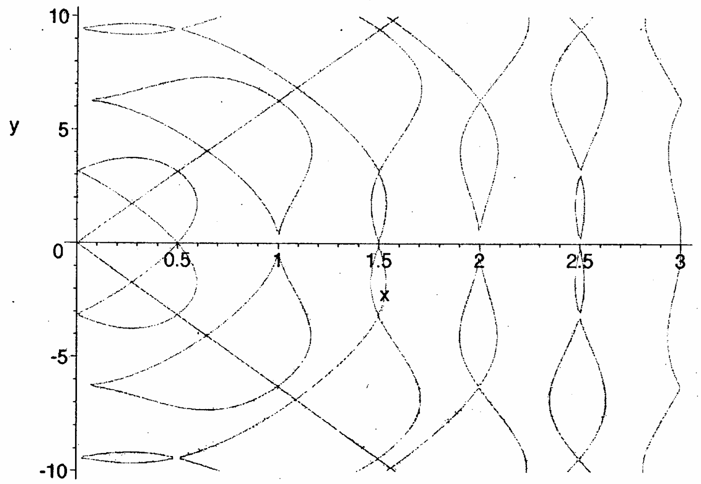
$$\ddot{x} = -f(t)x$$

mit $$f(t) = \begin{cases} (\omega+\varepsilon)^2, & \textit{für} \quad 0 \le t < T/2 \\ (\omega-\varepsilon)^2, & \textit{für} \quad T/2 \le t < T \end{cases}$$ sowie $f(t+T) = f(t)$ und $T = \pi/\omega$

Anleitung:

- Lösen Sie die Gleichung mit den Anfangsbedingungen x_0, v_0 zunächst im ersten Zeitabschnitt 0.. *T/2* (wo $\Omega^+ = \omega+\varepsilon$ konstant ist), danach im zweiten Zeitabschnitt $T/2..T$ mit $x(T/2), v(T/2)$ als Anfangsbedingungen (wobei dort $\Omega^- = \omega-\varepsilon$ konstant ist).
Sie erhalten eine Transformation $\{x_0, v_0\} \to \{x(T), v(T)\}$, die als diskrete Abbildung $\{x(t), v(t)\} \to \{x(t+T), v(t+T)\}$ verstanden werden kann.
- Versuchen Sie folgenden Lösungsansatz:
$\{x(t + (n + 1)T), v(t + (n + 1)T)\} = \{\mu x(t + nT), \mu v(t + nT)\}$
- Berechnen Sie den Stabilitätsbereich, dessen Grenze sich aus $\mu = 1$ ergibt.

```
with(plots):
implicitplot({cos((2*Pi*x-y)/2)*cos((2*Pi*x + y)/2) -
(((2*Pi*x)^2+y^2)/((2*Pi*x)^2-y^2))*
sin((2*Pi*x+y)/2)*sin((2*Pi*x-y)/2)=1,
cos((2*Pi*x-y)/2)*cos((2*Pi*x + y)/2) -
(((2*Pi*x)^2+y^2)/((2*Pi*x)^2-y^2))*
sin((2*Pi*x+y)/2)*sin((2*Pi*x-y)/2)=-1},x=0..3,y=-10..10,numpoin
ts=50000,resolution=2000);
```



III. Nehmen Sie nun in der ersten Aufgabe über das Pendel mit veränderlichen Länge an, dass die Länge des Pendels sich nach dem Gesetz $l = l_0 + h\cos\Omega t$ ändert, wobei $h \ll l_0$ ist.

- Stellen Sie die Bewegungsgleichung auf! Wodurch unterscheidet sie sich vom Fall konstanter Länge ($ml^2\ddot{\varphi} = -mgl\varphi$)?
- Bei (ungefähr) welcher Frequenz Ω würden Sie parametrische Resonanz erwarten?
- Was passiert, wenn die Frequenz von der erwarteten Resonanzfrequenz etwas abweicht?
- Wenn sich die Länge mit der Frequenz Ω ändert, welche Frequenz erwarten Sie für die Pendel-schwingungen?
- Wenn die Ruhelage instabil ist, in welcher Form würden Sie die Lösung der Bewegungsglei-chung suchen?
- Setzen Sie den von Ihnen vermuteten Lösungsansatz in die Bewegungsgleichung ein und überle-gen, was Sie damit weiter machen? Nehmen Sie an, dass die Schwingung "schwach instabil" ist (in Analogie zu "schwacher Dämpfung".
- Zeigen Sie, dass die parametrische Resonanz im Frequenzbereich $-\frac{h}{l}\omega_0 < \varepsilon < \frac{h}{l}\omega_0$ auftritt.

Nützliche Formeln

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$

$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha$

$\cos\alpha\cos\beta = \tfrac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\right]$

$\sin\alpha\sin\beta = \tfrac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right]$

$\sin\alpha\cos\beta = \tfrac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)\right]$