Aufgabe 1

(a) Mit dem zweiten NEWTONschen Gesetz ergeben sich die zwei Komponenten der BewegungsDGL zu:

$$\ddot{y} = -g \quad \text{und} \tag{1}$$
$$\ddot{x} = 0\,. \tag{2}$$

Integration mit den ABen $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = v_0 \cos\alpha$, $y(0) = 0$ und $\dot{y}(0) = v_0 \sin\alpha$ führt auf:

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin\alpha t \tag{3}$$
$$x(t) = v_0 \cos\alpha t\,. \tag{4}$$

Damit die Motoradfahrerin es schafft muss gelten:

$$y(t_f) \stackrel{!}{=} h \tag{5}$$
$$x(t_f) \stackrel{!}{=} 2h \tag{6}$$
$$\Rightarrow t_f = \frac{2h}{v_0 \cos\alpha}\,. \tag{7}$$

Einsetzen in (3) liefert:

$$h = -\frac{1}{2}g\left(\frac{2h}{v_0 \cos\alpha}\right)^2 + v_0 \sin\alpha \frac{2h}{v_0 \cos\alpha} \tag{8}$$
$$\Rightarrow v_0 = \underline{\underline{2\sqrt{gh}}} \tag{9}$$

(b) Es gilt für die Beschleunigung:

$$a_R = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x} = v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\,. \tag{10}$$

Integration liefert:

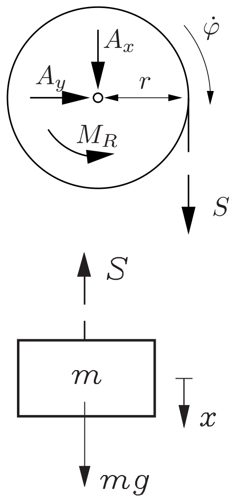
$$\int_0^{\sqrt{2}h} a_r \mathrm{d}x = \int_0^{v_0} v\mathrm{d}v = \frac{1}{2}v_0^2\,. \tag{11}$$

Schließlich ergibt sich a_R zu:

$$a_R = \frac{1}{2\sqrt{2}h}(2\sqrt{gh})^2 = \underline{\underline{\sqrt{2}g}}\,. \tag{12}$$

Aufgabe 2

(a)
Freischnitte:



Mit diesen ergeben sich die Bewegungsgleichungen zu:

$$\Theta^A \ddot{\varphi} = rS - M_R \tag{13}$$

$$m\ddot{x} = mg - S \tag{14}$$

Kinematik:

$$\dot{x} = r\dot{\varphi} \Rightarrow \ddot{x} = r\ddot{\varphi} \tag{15}$$

Einsetzen von (14) in (13) führt auf die konstante Beschleunigung

$$\ddot{x} = \frac{r^2 mg - rM_R}{\Theta^A + r^2 m} \tag{16}$$

(b) Die Beschleunigung $\ddot{x} := a_c$ ist konstant. Integration mit der Bedingung $x(t_i) = h$ für $i = 1, 2$ (für beide Massen m_i) führt auf:

$$h = \frac{1}{2}\frac{m_i g r^2 - M_R r}{\Theta_A + m_i r^2} t_i^2\,. \tag{17}$$

Eliminieren von M_R, und Auflösen der beiden Gleichungen mit einsetzen der vorgegebenen Werte führt auf:

$$\frac{2h}{t_1^2}\left(\Theta_A + m_1 r^2\right) - m_1 g r^2 = \tag{18}$$
$$\frac{2h}{t_2^2}\left(\Theta_A + m_2 r^2\right) - m_2 g r^2 \tag{19}$$
$$\Rightarrow \underline{\underline{\Theta_A = \frac{13}{5}mr^2}} \tag{20}$$

Aufgabe 3

(a) Das Massenträgheitsmoment ergibt sich mit dem Satz von Steiner zu:

$$\Theta^A = \Theta^S + Ma^2 = M(\frac{1}{3}l^2 + a^2) \tag{21}$$

(b) Da es sich um einen ideal elastischen Stoß handelt gilt die Energieerhaltung:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}\Theta^A\omega_0^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}\Theta^A\omega_2^2 \tag{22}$$

$$\Rightarrow \quad \omega_0^2 = \omega_2^2\,. \tag{23}$$

Weiterhin gilt die Drehimpulserhaltung (es wirken keine äußeren Momente):

$$-\Theta^A\omega_0 + mv_0(l+a) = \Theta^A\omega_2 - mv_0(l+a) \tag{24}$$

$$\Rightarrow \omega_0 = \omega_2 = \frac{mv_0(l+a)}{\Theta^A}\,. \tag{25}$$

Damit ergeben sich die gesuchten Winkelgeschwindigkeiten:

$$\vec{\omega}_0 = -\frac{mv_0(l+a)}{\Theta^A}\vec{e}_z \quad \text{und} \tag{26}$$

$$\vec{\omega}_2 = \frac{mv_0(l+a)}{\Theta^A}\vec{e}_z\,. \tag{27}$$

(c) In diesem Fall bleibt der Impuls erhalten:

$$-mv_0 + I_{S,v} = mv_0 + I_{S,n} \tag{28}$$

Dabei gilt für den Impuls des Schlägers vorher und nachher:

$$I_{S,v} = Mv_{s,0} = Ma\omega_0 \quad \text{und} \tag{29}$$

$$I_{S,n} = Mv_{s,2} = -Ma\omega_0 \tag{30}$$

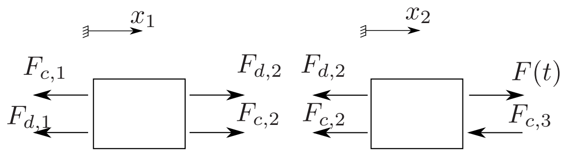
Die Länge a ist demnach:

$$\Rightarrow -mv_0 + Ma\omega_0 = mv_0 - Ma\omega_0 \tag{31}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{a = \frac{1}{3}l}}\,. \tag{32}$$

Aufgabe 4

(a) Freischnitt:



mit:

$$F_{c,1} = cx_1\,, \quad F_{c,3} = cx_2\,, \quad F_{d,1} = d\dot{x}_1 \tag{33}$$

$$F_{c,2} = 2c(x_2 - x_1)\,, \quad F_{d,2} = 3d(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) \tag{34}$$

Bewegungsdifferentialgleichung aufstellen:

$$3m\ddot{x}_1 = -cx_1 + 3d(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + 2c(x_2 - x_1) - d\dot{x}_1 \tag{35}$$

$$3m\ddot{x}_2 = -cx_2 - 3d(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - 2c(x_2 - x_1) + F(t) \tag{36}$$

Überführen auf Matrixschreibweise:

$$3m\ddot{x}_1 + 3cx_1 - 2cx_2 + 4d\dot{x}_1 - 3d\dot{x}_2 = 0 \tag{37}$$

$$3m\ddot{x}_2 + 3cx_2 - 2cx_1 + 3d\dot{x}_2 - 3d\dot{x}_1 = F(t) \tag{38}$$

$$\begin{bmatrix} 3m & 0 \\ 0 & 3m \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 4d & -3d \\ -3d & 3d \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} + \ldots \tag{39}$$

$$\ldots + \begin{bmatrix} 3c & -2c \\ -2c & 3c \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ F(t) \end{pmatrix}$$

(b) Ansatz:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \cos(\lambda t) \quad \Rightarrow \ddot{\vec{x}} = -\lambda^2 \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \cos(\lambda t) \tag{40}$$

Einsetzen liefert das Eigenwertproblem:

$$\begin{bmatrix} 3c - \lambda^2 3m & -2c \\ -2c & 3c - \lambda^2 3m \end{bmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \cos(\lambda t) = 0 \tag{41}$$

mit:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 3c - \lambda^2 3m & -2c \\ -2c & 3c - \lambda^2 3m \end{bmatrix}\,. \tag{42}$$

Damit eine nicht triviale Lösung existiert muss gelten:

$$\det \underline{A} \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow (3c - 3m\lambda^2)^2 - 4c^2 = 0 \tag{43}$$

$$\Rightarrow \lambda^4 - 2\frac{c}{m}\lambda^2 + \frac{5}{9}\left(\frac{c}{m}\right)^2 = 0\,. \tag{44}$$

Mit $\mu = \lambda^2$ gewinnt man eine quadratische Gleichung mit der Lösung:

$$\mu_{1,2} = \frac{c}{m}\left(1 \pm \frac{2}{3}\right)\,. \tag{45}$$

Damit folgen die Eigenkreisfrequenzen zu:

$$\underline{\underline{\omega_1 = \sqrt{\frac{1}{3}\frac{c}{m}}}} \quad \text{und} \quad \underline{\underline{\omega_2 = \sqrt{\frac{5}{3}\frac{c}{m}}}}\,. \tag{46}$$

Einsetzen in (41) liefert die Konstanten und damit die Eigenvektoren zu

$$A = B \quad \Rightarrow \quad \vec{E}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{47}$$

$$A = -B \quad \Rightarrow \quad \vec{E}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\,. \tag{48}$$

Damit ergibt sich schließlich als allgemeine Lösung:

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} (A_1 \cos\omega_1 t + B_1 \sin\omega_1 t) + \ldots \tag{49}$$

$$\ldots + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} (A_2 \cos\omega_2 t + B_2 \sin\omega_2 t)\,. \tag{50}$$