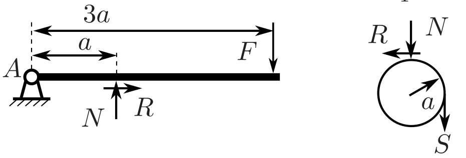
Aufgabe 1

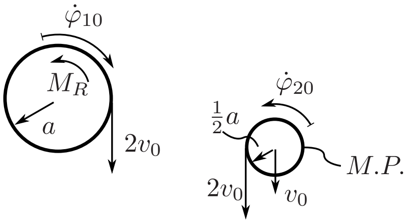
(a) Freischnitt des Hebels und der Rolle m_1 :



Momentengleichgewicht um das Lager A ergibt:

$$N = 3F \Rightarrow R = \mu 3F \tag{1}$$
$$\Rightarrow \underline{\underline{M_R = \mu 3aF}}. \tag{2}$$

(b) Skizze zu den kinematischen Beziehungen des Systems:



Rollen ohne Schlupf:

$$\underline{\underline{\dot\varphi_{10} = \frac{2v_0}{a}}}, \qquad \underline{\underline{\dot\varphi_{20} = \frac{2v_0}{a}}}. \tag{3}$$

(c) Arbeitssatz (① m_3 in Höhe a, ②:m_3 in Höhe 0):

$$(K_2 + U_2) - (K_1 + U_1) = \tilde{W}_{12} = \int_{\varphi_{11}}^{\varphi_{12}} -M_R \mathrm{d}\varphi \tag{4}$$

Mit den Ergebnissen aus (a) und (b):

$$K_2, U_2 = 0, \qquad U_1 = 3mga, \tag{5}$$
$$K_1 = \frac{1}{2}\Theta_1^{S_1}\dot\varphi_{10}^2 + \frac{1}{2}\Theta_2^{S_2}\dot\varphi_{20}^2 + \frac{1}{2}m_2 v_0^2 + \frac{1}{2}m_3 v_0^2, \tag{6}$$
$$= \frac{1}{2}mv_0^2\,(1+2+2+4) = \frac{9}{2}mv_0^2 \tag{7}$$

Mit der kinematischen Beziehung zwischen $\dot\varphi_1$ und der Geschwindigkeit der Masse m_3 aus (3) ergeben sich die Integrationsgrenzen zu:

$$\varphi_{11} = 0 \quad \text{und} \quad \varphi_{12} = \frac{2a}{a} = 2. \tag{8}$$

Dies in Gleichung (4) eingesetzt führt auf:

$$-\frac{9}{2}mv_0^2 - 3mga = \int_0^2 -\mu 3Fa\mathrm{d}\varphi. \tag{9}$$

Hieraus folgt die gesuchte Kraft F:

$$-\frac{9}{2}mv_0^2 - 3mga = -\mu 6Fa \tag{10}$$
$$\underline{\underline{F = \frac{5}{4}\frac{mg}{\mu}}}. \tag{11}$$

Aufgabe 2

(a) Zur Unterscheidung der Größen vor und nach dem Stoß werden diese jeweils mit dem Index v bzw. n versehen.

Während des Stoßvorgangs wirken keine äußeren Kräfte:

$$\vec{p} = \text{const.} \Rightarrow \vec{p}_v = \vec{p}_n \tag{12}$$
$$m_1 v_0 \vec{e}_x = m_2 v_{Sx}\vec{e}_x + m_2 v_{Sy}\vec{e}_y. \tag{13}$$

Somit ergibt sich die Geschwindigkeit $\vec{v}_S$ des Schwerpunkts von m_2 zu:

$$v_{Sx} = \frac{m_1}{m_2}v_0, \quad v_{Sy} = 0 \tag{14}$$
$$\underline{\underline{\vec{v}_S = \frac{m_1}{m_2}v_0\vec{e}_x}}. \tag{15}$$

Ein skalarer Lösungsweg ist nur dann gleichwertig, wenn:

- eine Gleichung in x-Richtung und eine in y-Richtung ausgewertet wird
- Der y-Anteil argumentativ erfasst wird

Während des Stoßvorgangs wirken zusätzlich keine äußeren Momente:

$$\vec{L} = \text{const.} \Rightarrow \vec{L}_v = \vec{L}_n \tag{16}$$
$$-am_1 v_0 \vec{e}_z = \Theta^S \omega \vec{e}_z. \tag{17}$$

Somit ergibt sich die Winkelgeschwindigkeit von m_2 zu:

$$\omega = -\frac{am_1 v_0}{\Theta^S} \tag{18}$$
$$\underline{\underline{\omega = -\frac{2m_1}{m_2 a}v_0}}. \tag{19}$$

Ein abweichendes Vorzeichen ist nur dann zulässig, wenn ein eigener positiver Richtungssinn explizit eingeführt worden ist.

(b) Der Stoss erfolgt ideal elastisch:

$$K_v = K_n, \tag{20}$$
$$\frac{1}{2}m_1 v_0^2 = \frac{1}{2}m_2 v_{Sx}^2 + \frac{1}{2}\Theta^S\omega^2, \tag{21}$$
$$\frac{1}{2}m_1 v_0^2 = \frac{1}{2}m_2\left(\frac{m_1}{m_2}v_0\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2}m_2 a^2\left(\frac{2m_1}{m_2 a}v_0\right)^2, \tag{22}$$
$$\frac{1}{2}m_1 v_0^2 = \frac{1}{2}m_2\frac{m_1^2}{m_2}v_0^2 + \frac{1}{4}4\frac{m_1^2}{m_2}v_0^2, \tag{23}$$
$$\Rightarrow \underline{\underline{\frac{m_1}{m_2} = \frac{1}{3}}}. \tag{24}$$

Aufgabe 3

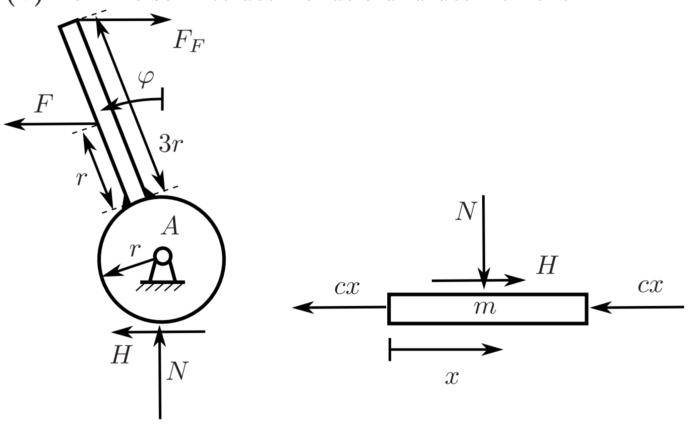
(a) Das Massenträgheitsmoment des Pendels bezüglich A ergibt sich zu:

$$\Theta^A = \Theta_{\text{Stab}} + m\left(\frac{5}{2}r\right)^2 + \Theta_{\text{Scheibe}}, \tag{25}$$

$$= \frac{3}{4}mr^2 + m\frac{25}{4}r^2 + mr^2 = \frac{32}{4}mr^2, \tag{26}$$

$$= \underline{\underline{8mr^2}}. \tag{27}$$

(b) Teil-Freischnitt des Pendels und des Balkens:



Impulssatz (2.Newtonsches Gesetz) für den Balken:

$$m\ddot{x} = -2cx + H. \tag{28}$$

Drehimpulssatz für das Pendel führt auf:

$$\Theta^A\ddot{\varphi} = -Hr + F2r\cos\varphi - F_F 4r\cos\varphi. \tag{29}$$

Für die Federkraft F_F und den kinematischen Zusammenhang zwischen $\ddot{x}$ und $\ddot{\varphi}$ gilt:

$$F_F = c\Delta x = c4r\sin\varphi, \quad \text{und} \tag{30}$$

$$\dot{x} = r\dot{\varphi} \Rightarrow \ddot{x} = r\ddot{\varphi},\ x = r\varphi. \tag{31}$$

Einsetzen in (28) führt auf:

$$H = mr\ddot{\varphi} + 2cr\varphi. \tag{32}$$

Dies wird zusammen mit (30) in Gleichung (29) eingesetzt:

$$\Theta^A\ddot{\varphi} = -mr^2\ddot{\varphi} - 2cr^2\varphi + F2r\cos\varphi - c16r^2\sin\varphi\cos\varphi. \tag{33}$$

Mit dem Ergebnis aus (a) folgt die gesuchte nicht-lineare Bewegungsgleichung:

$$9mr^2\ddot{\varphi} + 2cr^2\varphi + c16r^2\sin\varphi\cos\varphi = F2r\cos\varphi. \tag{34}$$

(c) Linearisieren der DGl aus (b) ergibt:

$$9mr^2\ddot{\varphi} + 18cr^2\varphi = F2r, \tag{35}$$

Umstellen führt auf die Gleichung:

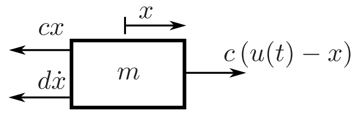
$$\ddot{\varphi} + \frac{2c}{m}\varphi = \frac{2}{9mr}F, \tag{36}$$

und damit auf die gesuchte Eigenkreisfrequenz:

$$\underline{\underline{\omega_0 = \sqrt{\frac{2c}{m}}}}. \tag{37}$$

Aufgabe 4

(a) Freischnitt des Körpers ergibt:



Der Impulssatz (2.Newtonsches Gesetz) führt auf:

$$m\ddot{x} = -d\dot{x} - cx + c\,(u(t) - x) \tag{38}$$

$$\ddot{x} + 2D\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{c}{m}\hat{u}\cos\Omega t,$$

$$\text{mit} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{2c}{m}} \quad \text{und} \quad D = \frac{d}{2m\omega_0}. \tag{39}$$

(b) Aufstellen der komplexen DGL:

$$\ddot{x}_c + 2D\omega_0\dot{x}_c + \omega_0^2 x_c = \frac{c}{m}\hat{u}e^{i\Omega t}. \quad . \tag{40}$$

Ansatz vom Typ der rechten Seite wählen:

$$x_c = \hat{x}e^{i\Omega t} \Rightarrow \dot{x}_c = \hat{x}e^{i\Omega t}, \ddot{x}_c = -\Omega^2\hat{x}e^{i\Omega t}. \tag{41}$$

Einsetzen in die Gleichung (40) ergibt:

$$\hat{x} = \hat{u}\frac{c}{m}\frac{1}{-\Omega^2 + i2D\Omega\omega_0 + \omega_0^2} = \hat{u}\frac{c}{m}\frac{1}{\omega_0^2}\frac{1}{1-\eta^2+i2D\eta}$$

$$= \hat{u}\frac{c}{m}\frac{m}{2c}\frac{1}{1-\eta^2+i2D\eta} = \frac{\hat{u}}{2}\frac{1}{1-\eta^2+i2D\eta}. \tag{42}$$

Hieraus bestimmt sich die reelle Lösung zu:

$$x = \Re\{x_c\} = |\hat{x}|\cos(\Omega t - \Theta) \tag{43}$$

$$= \frac{\hat{u}}{2}\frac{1}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + 4D^2\eta^2}}\cos(\Omega t - \Theta), \tag{44}$$

mit der Vergrößerungsfunktion und dem Phasenwinkel:

$$\underline{\underline{V(\eta, D) = \frac{1}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + 4D^2\eta^2}}}} \tag{45}$$

$$\underline{\underline{\Theta(\eta, D) = \arctan\frac{2D\eta}{1-\eta^2}}}. \tag{46}$$

(c) Mit den vorgegebenen Werten ist die Systemantwort:

$$x = \frac{\hat{u}}{2}\cos\left(\Omega t - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\hat{u}}{2}\sin\Omega t. \tag{47}$$