Aufgabe 1

(a) Energieerhaltung zwischen ①(parkender LKW) und ②(vor dem Auftreffen):

$$K_2 + U_2 = K_1 + U_1 \quad \boxed{1} \text{ Energieerhaltungssatz} \tag{1}$$

Für die Energien gilt $\boxed{1}$ für alle Energien:

$$K_1 = 0\,, \quad U_1 = (m_1+m_2)gh + \frac{1}{2}c(\Delta x)^2 \tag{2}$$

$$K_2 = \frac{1}{2}(m_1+m_2)v_2^2\,, \quad U_2 = 0\,. \tag{3}$$

Eingesetzt in (1) ergibt sich:

$$\frac{1}{2}(m_1+m_2)v_2^2 = (m_1+m_2)gh + \frac{1}{2}c(\Delta x)^2 \tag{4}$$

$$\Rightarrow v_2 = \sqrt{2gh + \frac{c(\Delta x)^2}{m_1+m_2}} \tag{5}$$

$$= \frac{3}{2}\sqrt{gh}\,. \quad \boxed{1} \text{ Ergebnis } v_2 \tag{6}$$

(b) Arbeitssatz zwischen ②(beim Aufprall, LKW steht) und ③(nach dem Aufprall)

$$K_3 - K_2 = W_{23} = \int_{②}^{③} \vec{F}_R \cdot \mathrm{d}\vec{r}\,. \quad \boxed{1} \text{ Arbeitssatz} \tag{7}$$

Die kinetischen Energien sind:

$$K_2 = \frac{1}{2}m_2v_2^2 \qquad K_3 = 0\,. \quad \boxed{1} \text{ beide Energien} \tag{8}$$

Für die Reibkraft gilt $F_R = \mu m_2 g$ und damit ergibt sich aus (7)

$$0 - \frac{1}{2}m_2v_2^2 = -\int_0^{x_R} \mu m_2 g\,\mathrm{d}s \quad \boxed{1} \text{ Integral und } F_R \tag{9}$$

$$= -\mu m_2 g x_R \tag{10}$$

$$\Rightarrow x_R = \frac{1}{2}\frac{v_2^2}{\mu g} \tag{11}$$

$$= \frac{3}{2}h \quad \boxed{1} \text{ Ergebnis } x_R \tag{12}$$

(c) Arbeitssatz zwischen $\tilde{②}$ (beim Aufprall des LKW, LKW steht) und $\tilde{③}$(zum Aufprall der Kiste an die Wand)

$$K_{\tilde{3}} - K_{\tilde{2}} = W_{\tilde{2}\tilde{3}}\,. \tag{13}$$

Für die Energien und die Arbeit gilt:

$$K_{\tilde{2}} = \frac{1}{2}m_2v_{\tilde{2}}^2\,, \quad K_{\tilde{3}} = \frac{1}{2}m_2v_{\tilde{3}}^2\,, \boxed{1} \text{ Beide Energien} \tag{14}$$

$$W_{\tilde{2}\tilde{3}} = -\int_0^l \mu m_2 g\,\mathrm{d}s\,. \quad \boxed{1} \text{ Integral und } F_R \tag{15}$$

Mit (13) ergibt sich dann:

$$\frac{1}{2}m_2v_{\tilde{3}}^2 - \frac{1}{2}m_2v_{\tilde{2}}^2 = -\mu m_2 g l \tag{16}$$

$$\Rightarrow v_{\tilde{3}} = \sqrt{v_{\tilde{2}}^2 - 2\mu g l} \tag{17}$$

$$= \frac{\sqrt{3gh}}{2}\,. \quad \boxed{1} \text{ Ergebnis } v_3 \tag{18}$$

Aufgabe 2

(a) Da keine äußeren Kräfte wirken bleibt der Impuls erhalten:

$$P_{vor} = P_{nach} \quad \boxed{1} \text{ Impulserhaltung} \tag{19}$$

Nach dem Abwurf von $m_1 + m_2$ mit der Relativgeschwindigkeit w zum Boot nach vorne gilt:

$$0 = (M - m_1 - m_2)(-v_a) + (m_1+m_2)(w - v_a) \tag{20}$$

$\boxed{1}$ Impulsbilanz (a)

Auflösen nach v_a liefert

$$v_a = \frac{m_1+m_2}{M}w \quad \boxed{1} \text{ Ergebnis } v_a \tag{21}$$

(b) Wiederum bleibt der Impuls erhalten:

$$0 = (M - m_2)(-v_{b_1}) + m_2(w - v_{b_1}) \tag{22}$$

$\boxed{1}$ Impulsbilanz (b)

Die Geschwindigkeit des Bootes nach Abwurf der Masse m_2:

$$v_{b_1} = \frac{m_2}{M}w \quad \boxed{1} \text{ Ergebnis } v_{b_1}$$

Danach wird die Masse m_1 abgeworfen:

$$(M - m_2)(-v_{b_1}) = (M - m_1 - m_2)(-v_b) + m_1(w - v_b)$$

$$(M - m_2)(-v_{b_1}) = (M - m_2)(-v_b) + m_1 w \quad \boxed{2}\ P_{vor}\&P_{nach}$$

$$\Rightarrow v_b = \left(\frac{m_2}{M} + \frac{m_1}{M - m_2}\right)w \quad \boxed{1} \text{ Ergebnis } v_b$$

Aufgabe 3

(a) Zusammenhang zwischen b und $\ddot{\varphi}$:

$$\ddot{\varphi} = b \quad \boxed{1} \text{ Zusammenhang} \tag{23}$$

$$\Rightarrow \dot{\varphi} = bt + C_1, \quad \varphi = \frac{1}{2}bt^2 + C_1 t + C_2 \, . \boxed{1}$$

Mit den Randbedingungnen $\varphi(0) = 0$ und $\dot{\varphi}(0) = \omega_0$ ergibt sich:

$$\dot{\varphi} = bt + \omega_0, \quad \varphi = \frac{1}{2}bt^2 + \omega_0 t \, . \quad \boxed{1} \text{ ABen \& Gl.}$$

Zum Zeitpunkt t_E gilt $\varphi(t_E) = 2\pi$ und $\dot{\varphi}(t_E) = 3\omega_0$:

$$2\pi = \frac{1}{2}bt_E^2 + \omega_0 t_E, \quad 3\omega_0 = bt_E + \omega_0 \, . \quad \boxed{1} \text{ Bed \& Gl.}$$

Aus (24) erhält man die Zeit t_E und die gesuchte Beschleunigung b:

$$t_E = -\frac{\omega_0}{b} + \sqrt{\left(\frac{\omega_0}{b}\right)^2 + \frac{4\pi}{b}} \quad \text{oder:} \quad t_E = \frac{2\omega_0}{b} \quad \boxed{1}\ t_E \tag{24}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{b = \frac{2\omega_0^2}{\pi}}} \quad \boxed{1} \text{ Ergebnis } b \tag{25}$$

(b) Allgemeine Form der gesuchten Größen: $\boxed{1}$

$$\vec{r} = r\vec{e}_r, \quad \dot{\vec{r}} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi, \tag{26}$$

$$\ddot{\vec{r}} = \left(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\right)\vec{e}_r + \left(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}\right)\vec{e}_\varphi \tag{27}$$

Mit den Ergebnissen ergeben sich die einzelnen Terme zu:

$$\varphi(t) = \frac{\omega_0^2}{\pi}t^2 + \omega_0 t, \tag{28}$$

$$\dot{\varphi}(t) = \frac{2\omega_0^2}{\pi}t + \omega_0, \quad \ddot{\varphi} = \frac{2\omega_0^2}{\pi}. \tag{29}$$

und:

$$r(t) = l\left(1 + \frac{\omega_0^2}{2\pi^2}t^2 + \frac{\omega_0}{2\pi}t\right), \tag{30}$$

$$\dot{r}(t) = l\left(\frac{\omega_0^2}{\pi^2}t + \frac{\omega_0}{2\pi}\right), \quad \ddot{r} = l\frac{\omega_0^2}{\pi^2} \tag{31}$$

Die gesuchten Vektoren sind somit:

$$\vec{r} = l\left(1 + \frac{\omega_0^2}{2\pi^2}t^2 + \frac{\omega_0}{2\pi}t\right)\vec{e}_r, \quad \boxed{1} \tag{32}$$

$$\dot{\vec{r}} = l\left(\frac{\omega_0^2}{\pi^2}t + \frac{\omega_0}{2\pi}\right)\vec{e}_r$$
$$+ l\left(1 + \frac{\omega_0^2}{2\pi^2}t^2 + \frac{\omega_0}{2\pi}t\right)\left(\frac{2\omega_0^2}{\pi}t + \omega_0\right)\vec{e}_\varphi, \quad \boxed{1} \tag{33}$$

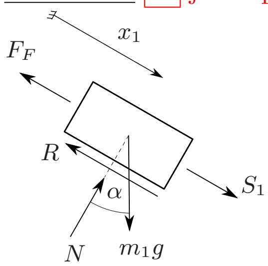
$$\ddot{\vec{r}} = l\left[\frac{\omega_0^2}{\pi^2} - \left(1 + \frac{\omega_0^2}{2\pi^2}t^2 + \frac{\omega_0}{2\pi}t\right)\left(\frac{2\omega_0^2}{\pi}t + \omega_0\right)^2\right]\vec{e}_r$$
$$+ l\left[2\left(\frac{\omega_0^2}{\pi^2}t + \frac{\omega_0}{2\pi}\right)\left(\frac{2\omega_0^2}{\pi}t + \omega_0\right) + \left(1 + \frac{\omega_0^2}{2\pi^2}t^2 + \frac{\omega_0}{2\pi}t\right)\frac{2\omega_0^2}{\pi}\right]\vec{e}_\varphi. \tag{34}$$

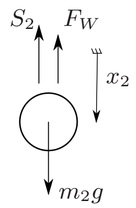
$\boxed{1}$

Aufgabe 4

(a) Das System besitzt einen Freiheitsgrad. $\boxed{1}$ FHG

(b) Freischnitt: $\boxed{2}$ je ein pro Masse





2. Newtonsches Gesetz:
Masse m_1:

$$m_1\ddot{x}_1 = S_1 - F_F - R + m_1 g \sin\alpha \tag{35}$$

$$m_1\ddot{y}_1 = N - m_1 g\cos\alpha \quad \boxed{1} \text{ für beide Richtungen} \tag{36}$$

Masse m_2:

$$m_2\ddot{x}_2 = -S_2 - F_w + m_2 g \quad \boxed{1} \tag{37}$$

Kraftgesetze:

$$R = \mu N, \tag{38}$$

$$F_F = cx_1, \quad F_w = k\dot{x} \quad \boxed{1} \text{ für diese zwei} \tag{39}$$

Kinematik der Rolle:

$$x_1 = x_2 = x \quad \Rightarrow \quad \ddot{x}_1 = \ddot{x}_2 = \ddot{x} \tag{40}$$

$$S_1 = S_2 \quad \boxed{1} \text{ für beide Bedg.} \tag{41}$$

Aus (37) folgt:

$$S_2 = -k\dot{x} - m_2\ddot{x} + m_2 g. \tag{42}$$

Mit $\ddot{y}_1 = 0$ ergibt sich:

$$N = m_1 g\cos\alpha \quad \Rightarrow \quad R = \mu m_1 g\cos\alpha \, . \quad \boxed{1} \text{ Ergebnis } R \tag{43}$$

Alles eingesetzt in (36) ergibt:

$$\underline{\underline{(m_1 + m_2)\ddot{x} + k\dot{x} + cx = g(m_1(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) + m_2)}} \quad \boxed{1} \tag{44}$$

(c) Aus (44) folgt mit den Vereinfachungen:

$$2m\ddot{x} = gm(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) + 1) \tag{45}$$

$$\ddot{x} = \frac{g}{2}(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) + 1) \quad \boxed{1} \text{ Gleichung} \tag{46}$$

Damit die Masse gebremst wird muss gelten:

$$\ddot{x} < 0 \, . \boxed{1} \text{ richtige Bedingung} \tag{47}$$

$$\Rightarrow 0 > \frac{g}{2}(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) + 1) \tag{48}$$

$$\Rightarrow \mu_{min} \geq \frac{1 + \sin\alpha}{\cos\alpha} \tag{49}$$

$$\underline{\underline{\geq \frac{3}{\sqrt{3}}}} \, . \quad \boxed{1} \text{ Ergebnis } \mu_{min} \tag{50}$$