

2. Merkblatt

Freie Kontinuumschwingungen

Vorgehen:

1. Aufstellen der Bewegungsdifferentialgleichung
2. Separationsansatz \rightarrow zwei gewöhnliche DGLn
3. Finde (oder kenne) die allgemeinen Lösungen der gewöhnlichen DGLn
4. Anpassen der allg. Lösung der Orts-DGL an die Randbedingungen liefert die Frequenzgleichung
5. Auswerten der Lösung der Orts-DGL für einzelne Frequenzen liefert die Eigenformen
6. Bei Bedarf: Anpassen der Gesamtlösung an die Anfangsbedingungen

Saiten, Stäbe und Torsionsstäbe

Saitenschwingungen, Longitudinal- und Torsionsschwingungen von Stäben werden alle durch die Wellengleichung beschrieben, allerdings sind die Verformungsgrößen andere und die Wellenausbreitungsgeschwindigkeiten definieren sich unterschiedlich.

$$\ddot{\xi} = c^2 \xi'' \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \quad (1)$$

Saite	$\xi = w(x, t)$ $c^2 = \frac{S}{\mu}$	Querauslenkung der Saite mit S als Vorspannkraft und μ als Massenbelegung
Stab	$\xi = u(x, t)$ $c^2 = \frac{E}{\rho}$	Longitudinalverschiebung des Stabes mit E als Elastizitätsmodul und ρ als Dichte
Torsionsstab	$\xi = \theta(x, t)$ $c^2 = \frac{G}{\rho}$	Torsionswinkel des Stabes mit G als Schubmodul und ρ als Dichte

Die gewöhnlichen DGLn und ihre allgemeinen Lösungen sind auf Merkblatt 1 angegeben.

Balken

Die Balkenbiegedifferentialgleichung lautet

$$\ddot{w}(x, t) = -\frac{EI}{\rho A} w''''(x, t) \quad (2)$$

Nach Separation mit Hilfe des Ansatzes $w(x, t) = X(x) \cdot T(t)$ ergeben sich die gewöhnlichen DGLn:

$$\ddot{T} + \omega^2 T = 0 \quad , \quad X'''' - \underbrace{\frac{\omega^2 \rho A}{EI}}_{=: \kappa^4} X = 0 \quad (3)$$

Die Orts-DGL ist 4. Ordnung, daher ergibt sich eine viergliedrige allgemeine Lösung mit vier Konstanten. Zur Bestimmung der Frequenzgleichung werden vier Randbedingungen benötigt.

$$X(x) = A \cos \kappa x + B \sin \kappa x + C \cosh \kappa x + D \sinh \kappa x \quad (4)$$