1. Merkblatt

Wellengleichung

Die Wellengleichung ist eine lineare, homogene, partielle Differentialgleichung.

$$\ddot{w} = c^2 w'' \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \tag{1}$$

$w(x,t)$	allg. Verschiebung in z-Richtung, hier Auslenkung der Saite
c	Wellenausbreitungsgeschwindigkeit, hier $c^2 = \frac{S}{\mu}$
S	Zugkraft, Vorspannkraft der Saite
$\mu = \rho A$	Massenbelegung der Saite

D'Alembertsche Lösung

Die D'Alembertsche Lösung der Wellengleichung lautet

$$w(x,t) = f_1(x - ct) + f_2(x + ct) \tag{2}$$

Die allgemeine Form der (zunächst beliebigen) Funktionen f_1 und f_2 können aus den Anfangsbedingungen bestimmt werden.
Für eine Saite kommen zwei Sorten von Randbedingungen in Betracht:

$w(\text{Rand}) = 0$	fester Rand
$w'(\text{Rand}) = 0$	freier Rand

Um einen **festen** Rand zu realisieren, wird die einlaufenden Welle mit einer Welle gleicher Form, aber **entgegengesetzer** Richtung und **negativem** Vorzeichen überlagert.

Um einen **freien** Rand zu realisieren, wird die einlaufenden Welle mit einer Welle gleicher Form, aber **entgegengesetzer** Richtung und **gleichem** Vorzeichen überlagert.

Bernoullische Lösung

Mit Hilfe des Separationsansatzes

$$w(x,t) = X(x) \cdot T(t) \tag{3}$$

erhält man zwei gewöhnliche Differentialgleichungen

$$\ddot{T} + \omega^2 T = 0 \tag{4}$$

mit der allg. Lösung

$$T(t) = C \sin(\omega t) + D \cos(\omega t) \tag{5}$$

$$X'' + \frac{\omega^2}{c^2} X = 0 \tag{6}$$

mit der allg. Lösung

$$X(x) = A \sin(\frac{\omega}{c} x) + B \cos(\frac{\omega}{c} x) \tag{7}$$

und den Konstanten A, B, C und D. Da ein Kontinuum unendlich viele Eigenkreisfreuquenzen ω_i besitzt, ergibt sich die allgemeine Gesamtlösung zu

$$w(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \left(C_i \sin(\omega_i t) + D_i \cos(\omega_i t)\right) \left(A_i \sin(\frac{\omega_i}{c} x) + B_i \cos(\frac{\omega_i}{c} x)\right) \tag{8}$$

Auswerten der Rand- und Anfangsbedingungen liefert sowohl alle Konstanten als auch die Eigenkreisfrequenzen ω_i.