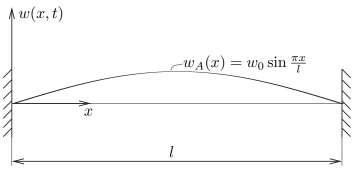
Tutorium

Aufgabe Z2

Eine Saite der Länge l wird mit der Kraft S vorgespannt und trägt die Masse pro Länge μ. Die Saite wird zur Zeit $t = 0$ wie dargestellt mit $w_A(x)$ ausgelenkt. Die Anfangsgeschwindigkeit ist Null.

Gegeben: $S, \mu, l, c^2 = \frac{S}{\mu}$,
$w(x, t = 0) = w_0 \sin \frac{\pi x}{l}$, $\quad \frac{\partial w}{\partial t}|_{(x,t=0)} = 0$



Bestimmen Sie die Bewegung der Saite $w(x, t)$. Benutzen Sie das gegebene Koordinatensystem, und gehen Sie wie folgt vor:

(a) Wie lautet der Ansatz nach d'Alembert?
(b) Leiten Sie den Ansatz nach der Zeit ab und setzen Sie die Anfangsbedingungen ein. Lösen Sie die beiden Gleichungen für den Zeitpunkt $t = 0$.
(c) Wie lauten die Randbedingungen des Problems?
(d) Wie müssen entsprechend die Teilwellen fortgesetzt werden, damit eine Lösung den Randbedingungen genügt? Geben Sie die Gesamtlösung des Problems, also $w(x, t)$, an.

(a) Das Problem wird durch die Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \tag{1}$$

beschrieben. Zur Lösung soll der Ansatz von d'Alembert

$$w(x, t) = f_1(x - ct) + f_2(x + ct) \tag{2}$$

benutzt werden.

(b) Dieser hat die zeitliche Ableitung

$$\begin{aligned} \dot{w}(x, t) &= \frac{\partial}{\partial t} w(x, t) \\ &= \frac{\partial f_1}{\partial(x - ct)} \frac{\partial(x - ct)}{\partial t} + \frac{\partial f_2}{\partial(x + ct)} \frac{\partial(x + ct)}{\partial t} \\ &= -cf_1'(x - ct) + cf_2'(x + ct). \end{aligned} \tag{3}$$

Dabei sind

$$f_1' := \frac{\partial f_1}{\partial(x - ct)} \text{und} \tag{4}$$

$$f_2' := \frac{\partial f_2}{\partial(x + ct)}. \tag{5}$$

Die Funktionen f_1 und f_2 werden aus den Anfangsbedingungen

$$w(x, t = 0) = w_0 \sin \frac{\pi x}{l} =: w_A(x), \tag{6}$$

$$\dot{w}(x, t = 0) = 0 \tag{7}$$

bestimmt. Aus (3) $\to$ (7) erhält man:

$$\begin{aligned} \dot{w}(x, t) = [-cf_1'(x - ct) + cf_2'(x + ct)]_{t=0} &= 0 \\ \Rightarrow f_1'(x) - f_2'(x) &= 0 \end{aligned} \tag{8}$$

und durch Integration über x:

$$f_1(x) - f_2(x) = 2A. \tag{9}$$

Dabei ist $2A$ eine Integrationskonstante.
Analog ergibt sich aus (2) $\to$ (6):

$$\begin{aligned} w(x, t = 0) &= [f_1(x - ct) + f_2(x + ct)]_{t=0} \\ &= f_1(x) + f_2(x) = w_A(x). \end{aligned} \tag{10}$$

Aus (9) + (10) folgt

$$f_1(x) = \frac{1}{2} w_A(x) + A. \tag{11}$$

und analog aus (10) - (9)

$$f_2(x) = \frac{1}{2} w_A(x) - A. \tag{12}$$

Setzt man nun (11) und (12) in (2) ein, so erhält man

$$\begin{aligned} w(x, t) &= \frac{1}{2} [w_A(x - ct) + w_A(x + ct)] \\ &= \frac{w_0}{2} \left[\sin \frac{\pi}{l}(x - ct) + \sin \frac{\pi}{l}(x + ct) \right], \end{aligned} \tag{13}$$

$$0 \leq x - ct, x + ct \leq l. \tag{14}$$

Die Anfangsauslenkung w_A spaltet sich in zwei Wellen mit halber Amplitude auf, die in entgegengesetzte Richtungen die Saite entlang laufen. Diese Lösung ist nur gültig, solange die Wellen die Ränder nicht berühren.

(c) Eine allgemeine Lösung erhält man durch Auswertung der Randbedingungen. Die Saite ist an beiden Ende fest eingespannt, daher gilt:

$$w(x = 0, t) = 0 \quad \text{und} \quad w(x = l, t) = 0. \tag{15}$$

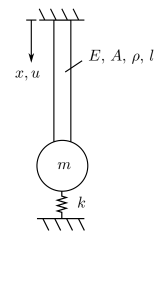
(d) Diese Randbedingungen werden erfüllt, wenn an den Rändern Wellen gleicher Form aber mit umgekehrten Vorzeichen und entgegengesetzter Laufrichtung reflektiert werden. Das wird erreicht, wenn die Lösung periodisch mit wechselndem Vorzeichen auf ganz $\mathbb{R}$ fortgesetzt wird. Diese Bedingung wird bereits durch Fortsetzung der Sinus-Funktionen auf ganz $\mathbb{R}$ erfüllt. Somit lautet die allgemeine Lösung:

$$w(x, t) = \frac{w_0}{2} \left[\sin \frac{\pi}{l}(x - ct) + \sin \frac{\pi}{l}(x + ct) \right]. \tag{16}$$

Aufgabe Z3

Ein schwingungsfähiges System wird wie skizziert als massebehafteter, nur längschwingender Dehnstab modelliert und das dazugehörige Fundament als einfaches Feder-Masse-Element. Es sollen die Eigenschwingungen des skizzierten Systems um die spannungsfreie Ausgangslage untersucht werden.

(a) Geben Sie für das System die Differentialgleichung für die Verschiebung $u(x, t)$ an.
(b) Leiten Sie mit Hilfe eines geeigenten Separationsansatzes die gewöhnliche Differentialgleichung im Ort her und geben Sie deren allgemeine Lösung an.
(c) Formulieren Sie die Randbedingungen.
(d) Geben Sie eine Bestimmungsgleichung für die Eigenfrequenzen des Systems an. Diese Gleichung soll nicht gelöst werden!



Geg.: ρ, E, A, L, m, k (kein Erdschwerefeld)

(a)

$$\rho A \ddot{u} - EAu'' = 0 \tag{17}$$

$$\Leftrightarrow \quad \ddot{u} = c^2 u'' \qquad \text{mit } c^2 = \frac{E}{\rho} \tag{18}$$

(b)

$$u(x,t) = X(x) \cdot T(t) \tag{19}$$

$$\ddot{u}(x,t) = X(x) \cdot \ddot{T}(t) \tag{20}$$

$$u''(x,t) = X''(x) \cdot T(t) \tag{21}$$

eingesetzt in die Wellengleichung (18) ergibt:

$$\frac{\ddot{T}}{T} = c^2 \frac{X''}{X} = -\omega^2 \tag{22}$$

$$\hookrightarrow \quad X'' + \frac{\omega^2}{c^2} X = 0 \tag{23}$$

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (23) lautet:

$$X(x) = B_1 \cos \lambda x + B_2 \sin \lambda x \tag{24}$$

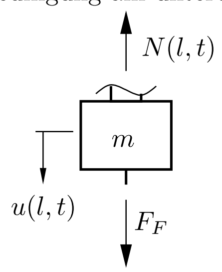
$$\text{mit } \lambda = \frac{\omega}{c} = \omega \sqrt{\frac{\rho}{E}} \tag{25}$$

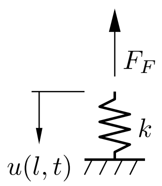
(c) Randbedingung am oberen Rand:

$$u(x=0,t) = 0 \tag{26}$$

$$X(0) = 0 \tag{RB 1}$$

Randbedingung am unteren Rand:





Impulsbilanz:

$$m\ddot{u}(l,t) = F_F - N(l,t) \tag{27}$$

Material-Strukur-Gleichung der Feder:

$$F_F = k\,\Delta l = -k\,u(l,t) \tag{28}$$

Material-Strukur-Gleichung des Dehnstabs:

$$N(l,t) = EA\,u'(l,t) \tag{29}$$

Eingesetzt:

$$m\ddot{u}(l,t) + k\,u(l,t) + EA\,u'(l,t) = 0 \tag{30}$$

Mit dem Ansatz (19) und (20) folgt $\forall t$:

$$\big(-m\omega^2 X(l) + kX(l) + EAX'(l)\big)T(t) = 0 \tag{31}$$

$$\hookrightarrow \quad X'(l) + \Big(\frac{k}{EA} - \frac{m\omega^2}{EA}\Big)X(l) = 0 \tag{32}$$

$$\Leftrightarrow \quad X'(l) + \Big(\frac{k}{EA} - \frac{m}{\rho A}\lambda^2\Big)X(l) = 0 \tag{RB 2}$$

(d) Einsetzen der allg. Lösung (24) in die Randbedingung (RB 1) ergibt:

$$B_1 = 0 \tag{33}$$

Einsetzen der allg. Lösung (24) in die Randbedingung (RB 2) ergibt:

$$B_2\Big(\lambda \cos \lambda l + \frac{k}{EA} \sin \lambda l - \frac{m}{\rho A}\lambda^2 \sin \lambda l\Big) = 0 \tag{34}$$

Sowohl $B_2 = 0$ als auch $\lambda = 0$ ergeben die triviale Lösung $u(x,t) = 0$, die nicht weiter betrachtet werden soll. Im anderen Fall ($B_2 \neq 0$, $\lambda \neq 0$) folgt:

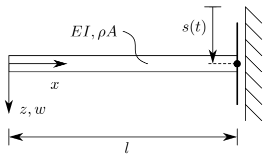
$$\lambda \cos \lambda l + \Big(\frac{k}{EA} - \frac{m}{\rho A}\lambda^2\Big) \sin \lambda l = 0 \tag{35}$$

$$\Leftrightarrow \quad EA\lambda \cos \lambda l + \Big(k - \frac{Em}{\rho}\lambda^2\Big) \sin \lambda l = 0 \tag{36}$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda + \Big(\frac{k}{EA} - \frac{m}{\rho A}\lambda^2\Big) \tan \lambda l = 0 \tag{37}$$

Aufgabe 42

Ein einseitig eingespannter Balken (Länge l, Biegesteifigkeit EI, Massebelegung μ) werde dadurch in erzwungene Schwingungen versetzt, dass die Einspannung eine harmonische Auf- und Abbewegung mit der Frequenz Ω durchführt. Bestimmen Sie die Durchbiegung $w(x,t)$ im eingeschwungenen Zustand.



Geg.: l, $EI =$ konst. in x, $\mu =$ konst. in x, $s(t) = s_0 \cos(\Omega t)$, Ω, s_0

<u>Wellengleichung</u>

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + c_B^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0 \qquad \text{mit } c_B^2 := \frac{EI}{\mu} \tag{38}$$

<u>Randbedingungen</u>

- *geometrisch (in w oder φ)*

$$w(l,t) = s(t) = s_0 \cos(\Omega t) \quad \forall t \tag{39}$$

$$\varphi(l,t) = w'(l,t) = 0 \quad \forall t \tag{40}$$

- *dynamisch (in M_b oder F_q)*

$$M_b(0,t) \overset{\text{MSG}}{=} -EIw''(0,t) = 0 \quad \forall t \tag{41}$$

$$\Rightarrow \quad w''(0,t) = 0 \quad \forall t \tag{42}$$

$$F_q(0,t) \overset{\text{MSG}}{=} -EIw'''(0,t) = 0 \quad \forall t \tag{43}$$

$$\Rightarrow \quad w'''(0,t) = 0 \quad \forall t \tag{44}$$

<u>Seperationsansatz</u>

$$w(x,t) \doteq X(x)T(t) \quad |\text{in DGL 38 einsetzen} \tag{45}$$

$$\Rightarrow \ddot{T}(t)X(x) + c_B^2 X^{IV}(x)T(t) = 0 \tag{46}$$

$$\Rightarrow -c_B^2 \frac{X^{IV}(x)}{X(x)} = \frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} \overset{!}{=} \text{konst.} \doteq -\alpha^2 \tag{47}$$

Es folgen damit zwei gewöhnliche Differentialgleichungen im Ort und in der Zeit:

$$\ddot{T}(t) + \alpha^2 T(t) = 0 \tag{48}$$

$$X^{IV}(x) - \kappa^4 X(x) = 0 \quad \text{mit } \kappa^4 := \left(\frac{\alpha}{c_B}\right)^2 \tag{49}$$

Die allgemeinen Lösungen ergeben sich aus dem Exponentialansatz zu:

$$T(t) = \widetilde{A}\cos(\alpha t) + \widetilde{B}\sin(\alpha t) \tag{50}$$

$$X(x) = A\cos(\kappa x) + B\sin(\kappa x) + C\cosh(\kappa x) + D\sinh(\kappa x) \tag{51}$$

<u>Anpassen der allgemeinen Lösung an die RBn</u>

$$\begin{aligned}
\text{RB 42} \Rightarrow \quad w''(0,t) =& \kappa^2\left[-A + C\right]T(t) \stackrel{!}{=} 0 \quad \forall t \\
\Rightarrow \quad & \underline{A = C} \qquad (52) \\
\text{RB 44} \Rightarrow \quad w'''(0,t) =& \kappa^3\left[-B + D\right]T(t) \stackrel{!}{=} 0 \quad \forall t \\
\Rightarrow \quad & \underline{B = D} \qquad (53) \\
\text{RB 40} \Rightarrow \quad w'(l,t) =& \kappa\left[A\left(-\sin(\kappa l) + \sinh(\kappa l)\right)\right. \\
& \left. + B\left(\cos(\kappa l) + \cosh(\kappa l)\right)\right]T(t) \\
\stackrel{!}{=}& 0 \quad \forall t \\
\Rightarrow \quad & \underline{B = -A\frac{\sinh(\kappa l) - \sin(\kappa l)}{\cos(\kappa l) + \cosh(\kappa l)}} \qquad (54)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{RB 39} \Rightarrow \quad w(l,t) =& X(l)\underbrace{\left(\widetilde{A}\cos(\alpha t) + \widetilde{B}\sin(\alpha t)\right)}_{T(t)} \qquad (55) \\
\stackrel{!}{=}& s_0\cos(\Omega t) \quad \forall t
\end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert:

$$\underline{\widetilde{B} = 0} \quad \text{und} \quad \underline{\alpha = \Omega} \quad \stackrel{\text{Gl.}(49)}{\Rightarrow} \quad \underline{\kappa^2 = \frac{\Omega}{c_B}} \tag{56}$$

Somit wird aus Gl. 55 und 54:

$$\begin{aligned}
\widetilde{A}X(l) =& \widetilde{A}\cdot A\Big[\left(\cos(\kappa l) + \cosh(\kappa l)\right) + \ldots \\
& + \underbrace{\frac{\sin(\kappa l) - \sinh(\kappa l)}{\cos(\kappa l) + \cosh(\kappa l)}}_{B}\left(\sin(\kappa l) + \sinh(\kappa l)\right)\Big] \qquad (57) \\
=& \widetilde{A}\cdot A\left[\frac{\left(\cos(\kappa l) + \cosh(\kappa l)\right)^2 + \sin^2(\kappa l) - \sinh^2(\kappa l)}{\cos(\kappa l) + \cosh(\kappa l)}\right] \qquad (58) \\
=& 2\widetilde{A}\cdot A\left[\frac{1 + \cos(\kappa l)\cosh(\kappa l)}{\cos(\kappa l) + \cosh(\kappa l)}\right] \stackrel{!}{=} s_0 \qquad (59)
\end{aligned}$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit lässt sich die folgende Ersetzung machen:

$$G := A\cdot\widetilde{A} \tag{60}$$

Man erhällt also für G:

$$\underline{G = \frac{s_0}{2}\left[\frac{\cos(\kappa l) + \cosh(\kappa l)}{1 + \cos(\kappa l)\cosh(\kappa l)}\right]} \tag{61}$$

Für die Durchsenkung $w(x,t)$ ergibt sich also folgender Zusammenhang:

$$\begin{aligned}
w(x,t) = \frac{s_0}{2}\left(\frac{\cos(\kappa l) + \cosh(\kappa l)}{1 + \cos(\kappa l)\cosh(\kappa l)}\right)\Bigg[& \cos(\kappa x) + \cosh(\kappa x) + \ldots \\
& + \frac{\sin(\kappa l) - \sinh(\kappa l)}{\cos(\kappa l) + \cosh(\kappa l)}\left(\sin(\kappa x) + \sinh(\kappa x)\right)\Bigg]\cos(\Omega t)
\end{aligned} \tag{62}$$

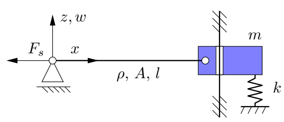
Setzt man zur Kontrolle $x = l$, so sieht man, dass die Randbedingung 39 erfüllt wird:

$$\begin{aligned}
w(x,t) =& \frac{s_0}{2}\left(\frac{\cos(\kappa l) + \cosh(\kappa l)}{1 + \cos(\kappa l)\cosh(\kappa l)}\right)\Bigg[\cos(\kappa l) + \cosh(\kappa l) + \ldots \\
& + \frac{\sin(\kappa l) - \sinh(\kappa l)}{\cos(\kappa l) + \cosh(\kappa l)}\left(\sin(\kappa l) + \sinh(\kappa l)\right)\Bigg]\cos(\Omega t) \\
=& \frac{s_0}{2}\left(\frac{\cos(\kappa l) + \cosh(\kappa l)}{1 + \cos(\kappa l)\cosh(\kappa l)}\right)2\left[\frac{1 + \cos(\kappa l)\cosh(\kappa l)}{\cos(\kappa l) + \cosh(\kappa l)}\right]\cos(\Omega t) \\
=& s_0\cos(\Omega t)
\end{aligned} \tag{63}$$

Hausaufgaben

Aufgabe 11

Eine Saite (Dichte ρ, Querschnittsfläche A, Länge l) ist links ($x = 0$) über ein Loslager gelagert und rechts ($x = l$) an einem vertikal geführten Körper (Masse m) befestigt. Der starre Körper wird durch eine Feder wie skizziert gestützt. Die Feder ist in der gezeichneten Lage entspannt. Die äußere Kraft F_s ist zeitlich konstant (und wirke immer genau waagerecht).



(a) Leite die Wellengleichung einer Saite an einem infinitesimalen Stück Saite her.

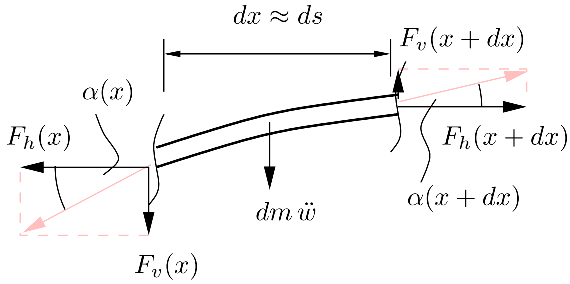
(b) Bestimme die Eigenwertgleichung.

(c) Zeige, dass sich für den Fall $k = \frac{-4\rho A l + \pi m}{16\rho A l^2}\pi F_s$ die erste Eigenfrequenz $\omega_1 = \frac{\pi c}{4l}$ ergibt.

Geg.: l, m, k, F_s, ρ, A

(a) Wellengleichung

Freischnitt am differentiell kleinen Element: Freischnitt am differentiell kleinen Element:



Dynamisches Kräftegleichgewicht:

$$dm\,\ddot{u}(x,t) = F_h(x + dx, t) - F_h(x,t) \tag{64}$$

$$\ddot{u} = 0, \text{ da reine Transversalschwingung}$$

$$\Rightarrow 0 = F_h'(x,t)\,dx \Rightarrow F_h(x,t) = F_h = \text{konst.} \tag{65}$$

$$dm\,\ddot{w}(x,t) = F_v(x+dx,t) - F_v(x,t) \tag{66}$$
$$\rho A\,dx\,\ddot{w}(x,t) = F_v'(x,t)\,dx \tag{67}$$

Kinematik:

$$\frac{F_v(x,t)}{F_h} = \tan\alpha(x,t) = w'(x,t) \tag{68}$$
$$\Rightarrow F_v(x,t) = F_h\,w'(x,t) \tag{69}$$
$$F_h = F_s\cos\alpha(x,t) \approx F_s \quad (\text{für kleine } \alpha) \tag{70}$$

Aus Gl. (67) mit Gl. (69) und Gl. (70) ergibt sich die folgende partielle Differentialgleichung der Bewegung

$$\ddot{w}(x,t) - \frac{F_s}{\rho A}w''(x,t) = 0 \tag{71}$$

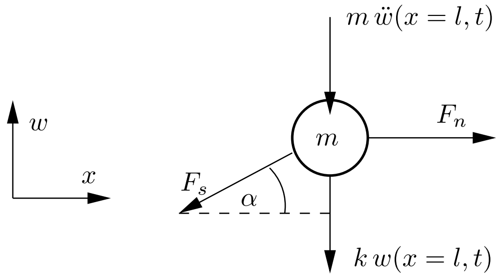
(b) Eigenwertgleichung
Ausgangspunkt der Betrachtungen ist eindimensionale Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \qquad \text{mit } c^2 = \frac{F_s}{\rho A} \tag{72}$$

Die geometrische Randbedingung am linken Rand wird durch

$$w(x=0,t) = 0 \tag{73}$$

beschrieben. Die dynamische Randbedingung am rechten Rand erhält man durch Betrachtung der freigeschnittenen Punktmasse.



Bei einer reinen Vertikalbewegung der Punktmasse gilt

$$F\cos\alpha = F_s \quad , \tag{74}$$
$$m\left.\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right|_{(x=l,t)} = -kw(x=l,t) - F\sin\alpha. \tag{75}$$

Die Gleichungen (74) und (75) führen zu

$$m\left.\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right|_{(x=l,t)} = -kw(x=l,t) - F_s\left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{(x=l,t)}. \tag{76}$$

Die Eigenwertgleichung erhält man durch Anpassen dieser Randbedingungen an die Lösung

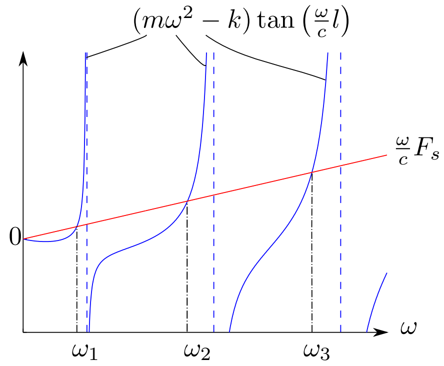
$$w(x,t) = \left[A\sin\left(\frac{\omega}{c}x\right) + B\cos\left(\frac{\omega}{c}x\right)\right]\cos(\omega t+\varphi). \tag{77}$$

Einsetzen von (77) in (73) ergibt sofort $B = 0$. Einsetzen von (77) in (76) führt nach Umformen auf die Eigenwertgleichung

$$(m\omega^2 - k)\tan\left(\frac{\omega}{c}l\right) = \frac{\omega}{c}F_s. \tag{78}$$

Die Eigenwertgleichung (78) hat unendlich viele Lösungen ω_k mit $k \in \mathbb{N}$ Für gegebene Zahlenwerte für m, k, l, ρ, A und F_s kann man diese numerisch oder graphisch bestimmen.

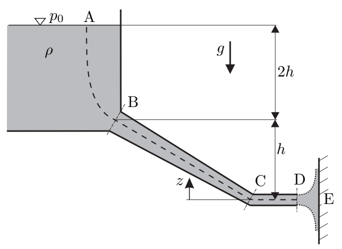
Exemplarisch ist eine graphische Lösung der Eigenwertgleichung im folgenden Bild gezeigt.



(c) Erste Eigenfrequenz
Einsetzen von $k = \frac{-4\rho Al+\pi m}{16\rho Al^2}\pi F_s$ und $\omega_1 = \frac{\pi c}{4l}$ in die Eigenwertgleichung zeigt, dass (78) tatsächlich erfüllt ist. Die erste Eigenform ist dann $X_1(x) = \sin\left(\frac{\pi}{4l}x\right)$.

Aufgabe 74

Aus dem Abflussrohr eines großen Behälters trifft Wasser auf eine Wand.
Das Abflussrohr besitzt einen kreisförmigen Querschnitt. Der Querschnittsradius r verkleinert sich entlang der Rohrlänge linear von $r(z=h) = 2R$ bei B auf $r(z=0) = R$ bei C. Zwischen C und D ist der Querschnitt konstant.
Die Querschnittsfläche des Abflussrohres ist im Vergleich zur freien Wasserfläche im Behälter vernachlässigbar klein. Außerdem ist auch der Radius r des Rohres gegenüber der Höhe h vernachlässigbar klein. Das Wasser kann als ideales Fluid und die Strömung als stationär betrachtet werden.
Gegeben: g, ρ, p_0, h, R



(a) Geben Sie den Wasserdruck $p(z)$ im Behälter in Abhängigkeit der Koordinate z an. Wie groß ist der Wasserdruck am Behälterboden (Tiefe $2h$)?

(b) Bestimmen Sie die Strömungsgeschwindigkeit $v(z)$ zwischen B und C in Abhängigkeit von der Höhe z.

(c) Ermitteln Sie den Druckverlauf $p(z)$ zwischen B und C in Abhängigkeit von der Höhe z.

(d) Welche Kraft übt der Wasserstrahl bei E auf die Wand aus?

Hinweis: Überlegen Sie bei (b) und (c) zunächst, wie groß Strömungsgeschwindigkeit und Druck an den Stellen D und C sind.

(a) Hydrostatik:

$$p(z) = p_0 + \rho g(3h - z) \tag{79}$$

am Behälterboden herrscht der Druck

$$p(z=h) = p_0 + 2\rho gh \tag{80}$$

(b) Radius des Abflussrohres zwischen B und C:

$$r(z) = R + \frac{R}{h} z \tag{81}$$

Querschnittsfläche zwischen B und C:

$$A(z) = \pi r(z)^2 = \pi (R + \frac{R}{h} z)^2 \tag{82}$$

Die Geschwindigkeit an der Rohröffnung wird mit der Ausflussformel von Toricelli (alternativ: Bernoulli A-D) bestimmt:

$$v_{\mathrm{D}} = \sqrt{6gh} \tag{83}$$

und aus der Kontinuitätsgleichung folgt unmittelbar

$$v_{\mathrm{C}} = v_{\mathrm{D}} = \sqrt{6gh}. \tag{84}$$

Mit der Kontinuitätsgleichung kann nun die Geschwindigkeit in einem beliebigen Punkt z zwischen B und C berechnet werden:

$$A(z) v(z) = A_{\mathrm{C}} v_{\mathrm{C}} \tag{85}$$

$$\Leftrightarrow v(z) = \frac{\pi R^2}{\pi \left(R + \frac{R}{h} z\right)^2} \sqrt{6gh}$$

$$v(z) = \frac{\sqrt{6gh}}{\left(1 + \frac{z}{h}\right)^2}. \tag{86}$$

(c) An der Rohröffnung ist der Druck in der Flüssigkeit gleich dem Außendruck und aus der Bernoulligleichung folgt mit (84):

$$p_{\mathrm{C}} = p_{\mathrm{D}} = p_0. \tag{87}$$

Der Druck in einem beliebigen Punkt z zwischen B und C kann nun ebenfalls mit der Bernoulligleichung berechnet werden:

$$p(z) + \frac{\rho}{2} v(z)^2 + \rho g z = p_{\mathrm{C}} + \frac{\rho}{2} v_{\mathrm{C}}^2 + 0 \tag{88}$$

$$\Leftrightarrow p(z) = p_0 - \rho g z + \frac{\rho}{2} (v_{\mathrm{C}}^2 - v(z)^2)$$

$$= p_0 - \rho g z + \frac{\rho}{2} \left[6gh - \frac{6gh}{\left(1 + \frac{z}{h}\right)^4} \right]$$

$$p(z) = p_0 + \rho g (3h - z) - \frac{3\rho g h}{\left(1 + \frac{z}{h}\right)^4} \tag{89}$$

(d) Die Kraft auf die Wand wird mit dem Impulssatz berechnet. Dazu wird zunächst der Massenstrom bestimmt:

$$J_{\mathrm{D}} = \rho A_{\mathrm{D}} v_{\mathrm{D}} \tag{90}$$

$$= \pi \rho R^2 \sqrt{6gh} \tag{91}$$

Der Impulssatz liefert die Kraft auf die Flüssigkeit:

$$F_F = J_{\mathrm{D}} (v_{\mathrm{E}} - v_{\mathrm{D}}) \quad \text{mit } v_{\mathrm{E}} = 0$$

$$= -6\pi \rho g h R^2. \tag{92}$$

Die Kraft auf die Wand hat den gleichen Betrag, ist jedoch entgegen gesetzt gerichtet. Also übt der Wasserstrahl die Kraft

$$F = -F_F = 6\pi \rho g h R^2 \tag{93}$$

auf die Wand aus.