

Tutorium

Aufgabe 82

Betrachtet wird ein Rohr (Radius R), durch das eine Newtonsche Flüssigkeit (dynamische Viskosität η) fließt. Der Volumenstrom sei Q . Es soll von laminarer Strömung ausgegangen werden. Das Geschwindigkeitsprofil $u(r)$ bei stationärer Strömung soll in den unten aufgeführten Schritten bestimmt werden.

- (a) Zeigen Sie, daß die Differentialgleichung für die Strömungsgeschwindigkeit $u(r)$

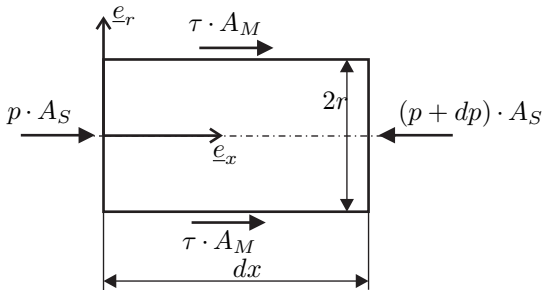
$$\frac{du}{dr} = \frac{r}{2\eta} \frac{dp}{dx}$$

lautet.

- (b) Wie lauten die Randbedingungen?
 (c) Bestimmen Sie nun das Geschwindigkeitsprofil in Abhängigkeit vom Druckgefälle.
 (d) Leiten Sie schließlich eine Formel für das Geschwindigkeitsprofil $u(r)$ her, in der nur die gegebenen Größen enthalten sind.

Geg.: R, Q, η

Freischnitt eines Volumenelements (Zylinder)



Annahmen:

- schleichende Strömung $\Rightarrow \frac{dv}{dt} = 0$
- Inkompressibilität
- Druck hängt nur von x ab $\Rightarrow p = p(x)$

(a)

$$m\ddot{x} = \sum F_x = 0 = \tau A_M + p A_S - (p + dp) A_S \quad (1)$$

$$\Rightarrow \tau \cdot 2\pi r \cdot dx - dp \pi r^2 = 0 \quad (2)$$

NEWTONSches-Schubspannungsgesetz

$$\tau = \eta \frac{dv_x}{dr} \quad (3)$$

$$\tau 2\pi r dx = \pi r^2 dp \quad (4)$$

$$\Rightarrow \tau = \frac{r}{2} \frac{dp}{dx} \quad (5)$$

$$\Rightarrow \eta \frac{dv_x}{dr} = \frac{r}{2} \frac{dp}{dx} \quad (6)$$

$$\frac{dv_x}{dr} = \frac{r}{2\eta} \frac{dp}{dx} \quad (7)$$

$$\Rightarrow v_x = \frac{dp}{dx} \frac{1}{4\eta} r^2 + C \quad (8)$$

(b) Randbedingung

Haften am Rand

$$v_x(r = R) = 0 \quad (9)$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{dp}{dx} \frac{1}{4\eta} R^2 + C \quad (10)$$

$$\Rightarrow C = -\frac{dp}{dx} \frac{1}{4\eta} R^2 \quad (11)$$

(c) Geschwindigkeitsprofil

$$v_x(r) = \frac{dp}{dx} \frac{1}{4\eta} (r^2 - R^2) \quad (12)$$

Beachten der Bedingung $Q = \text{const.}$:

$$Q = \int_{(A)} v(r) dA \quad (13)$$

$$\text{mit } dA = 2\pi r dr \quad (14)$$

$$Q = \int_0^R \frac{dp}{dx} \frac{1}{4\eta} (r^2 - R^2) 2\pi r dr \quad (15)$$

$$Q = \frac{dp}{dx} \frac{1}{4\eta} 2\pi \int_0^R (r^3 - rR^2) dr \quad (16)$$

$$Q = \frac{dp}{dx} \frac{\pi}{2\eta} \left[\frac{1}{4} r^4 - \frac{1}{2} R^2 r^2 \right]_0^R \quad (17)$$

$$Q = \frac{dp}{dx} \frac{\pi}{2\eta} \left[\frac{1}{4} R^4 - \frac{1}{2} R^4 \right] \quad (18)$$

$$Q = -\frac{dp}{dx} \frac{\pi}{8\eta} R^4 \quad (19)$$

(d) Druckgradient $\frac{dp}{dx}$

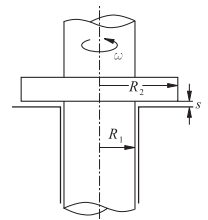
$$\frac{dp}{dx} = -\frac{8\eta Q}{\pi R^4} \quad (20)$$

$$\Rightarrow v_x(r) = -\frac{2Q}{\pi R^4} (r^2 - R^2) \quad (21)$$

$$\Rightarrow v_x(r) = \frac{2Q}{\pi R^2} \left(1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right) \quad (22)$$

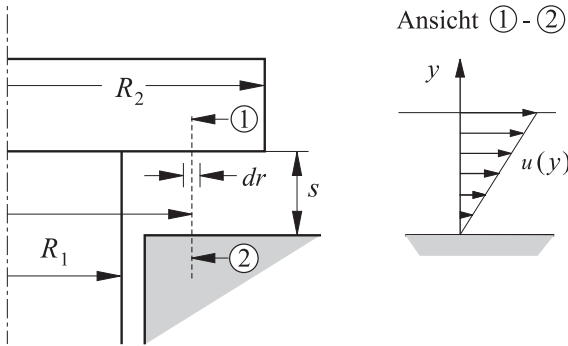
Aufgabe 84

Das gezeichnete Traglager wird durch einen sehr dünnen Ölfilm der Dicke s geschmiert. Die Zähigkeit des Schmieröls sei η . Bestimmt werden soll das zur Überwindung der Flüssigkeitsreibung erforderliche Drehmoment $M(\omega)$ in Abhängigkeit von der Winkelgeschwindigkeit ω . Die Reibung im Radialagerteil (zylindrischer Bereich) soll dabei vernachlässigt werden.



- (a) Bestimme die Schubspannung $\tau(r)$ im Abstand r von der Drehachse bei vorgegebener Winkelgeschwindigkeit ω .
 (b) Wie groß ist das Drehmoment $dM(r)$, das zur Überwindung der Flüssigkeitsreibung eines Kreisringes mit der infinitesimalen Breite dr erforderlich ist?
 (c) Bestimme das Drehmoment $M(\omega)$!
 (d) Welches Drehmoment ergibt sich für $\omega = 318,3 \text{ min}^{-1}$?

Geg.: $R_1 = 0,2\text{m}$; $R_2 = 0,4\text{m}$; $s = 0,2\text{mm}$;
 $\omega = 318,3\text{min}^{-1} \hat{=} n = 50,66\text{min}^{-1}$; $\eta = 0,4\text{Ns/m}^2$



(a) Für die Spannung $\tau(r)$ gilt nach dem Newtonschen Reibungsgesetz (Couette-Strömung ohne Druckgradient):

$$\tau(r) = \eta \cdot \frac{du}{dy} = \eta \cdot \frac{\Delta u}{\Delta y} = \eta \cdot \frac{u_{\text{Welle}}(r)}{s} \quad (23)$$

mit

$$u_{\text{Welle}}(r) = r \cdot \omega \quad (24)$$

Damit folgt:

$$\tau(r) = \eta \cdot \frac{r \cdot \omega}{s} \quad (25)$$

(b) Für das Drehmoment dM des Kreisringes mit dem Radius r und der Breite dr gilt:

$$dM = \tau(r) \cdot r \cdot dA \quad (26)$$

Mit der Fläche des Kreisringes

$$dA = 2\pi \cdot r \cdot dr \quad (27)$$

und Gleichung (25) wird daraus

$$dM = \frac{2\pi\eta\omega}{s} r^3 dr \quad (28)$$

(c) Das Gesamtdrehmoment ergibt sich daraus durch Integration:

$$M = \int_{R_1}^{R_2} dM \quad (29)$$

$$= \frac{2\pi \cdot \eta \cdot \omega}{s} \cdot \int_{R_1}^{R_2} r^3 dr \quad (30)$$

$$= \frac{2\pi \cdot \eta \cdot \omega}{s} \cdot \left(\frac{R_2^4 - R_1^4}{4} \right) \quad (31)$$

$$= \frac{\pi \cdot \eta \cdot \omega}{2s} \cdot (R_2^4 - R_1^4) \quad (32)$$

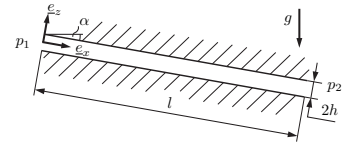
(d) Mit den gegebenen Zahlenwerten ergibt sich:

$$M = \frac{\pi \cdot 0,4 \frac{\text{Ns}}{\text{m}^2} \cdot 318,3 \frac{1}{\text{min}} \cdot \frac{1 \text{min}}{60\text{s}} \left[(0,4\text{m})^4 - (0,2\text{m})^4 \right]}{2 \cdot 0,0002\text{m}} \approx 400\text{Nm}$$

Hausaufgaben

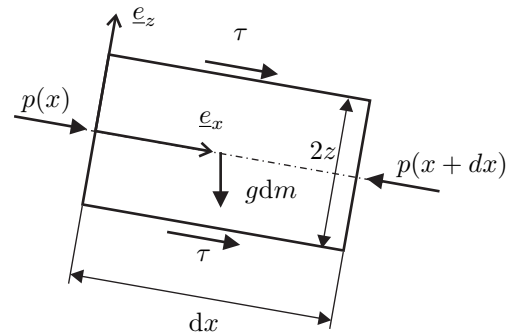
Aufgabe 80

Ein inkompressibles, Newtonsches Fluid (Dichte ρ , dynamische Viskosität η) fließt in e_x -Richtung durch einen dünnen Spalt (Dicke $2h$, Länge l). Senkrecht zur Zeichenebene hat der Spalt die Breite b mit $b \gg h$. Am linken Ende des Spalts herrscht der Druck p_1 , am rechten Ende p_2 . Im Spalt stellt sich eine stationäre, laminare Strömung ein. Weiterhin wird davon ausgegangen, dass die Strömungsgeschwindigkeit \underline{v} nur von z und der Druck p nur von x abhängen.
 Geg.: $\eta, \rho, \alpha, g, l, h, p_1, p_2$



- (a) Schneiden Sie ein Volumenelement des Fluids frei und ermitteln Sie daran das Strömungsprofil $v(z)$ im Spalt und die maximale Geschwindigkeit v_0 .
Hinweis: Verwenden Sie ein Volumenelement, welches in e_x -Richtung endlich breit ist und symmetrisch zur e_x -Achse liegt. Überlegen Sie, was das für die Schubspannungen bedeutet.
- (b) Bestimmen Sie den Volumenstrom Q durch den Spalt.
- (c) Angenommen, das Fluid wäre reibungsfrei. Wie groß müsste die Strömungsgeschwindigkeit \bar{v} im Vergleich zur maximalen Geschwindigkeit v_0 sein, damit sich derselbe Volumenstrom einstellt?

(a) Freischnitt:



Aus Symmetriegründen sind die Schubspannungen am oberen und am unteren Rand identisch. Da die Strömung stationär ist, müssen die Kräfte in e_x -Richtung im Gleichgewicht sein:

$$\begin{aligned} 0 &= 2zb(p(x) - p(x + dx)) + gdm \sin \alpha + 2\tau b dx \\ &= -z(p(x + dx) - p(x)) + \rho g z \sin \alpha dx + \tau dx \\ \tau &= \frac{dp}{dx} z - \rho g z \sin \alpha. \end{aligned} \quad (33)$$

Mit

$$\tau = \eta \frac{dv}{dz} \quad (34)$$

folgt

$$\frac{dv}{dz} = \frac{1}{\eta} \left(\frac{dp}{dx} - \rho g \sin \alpha \right) z \quad (35)$$

und nach Integration über z :

$$v(z) = \left(\frac{dp}{dx} - \rho g \sin \alpha \right) \frac{z^2}{2\eta} + c \quad (36)$$

Die Konstante c wird aus der Randbedingung

$$v(\pm h) = 0 \quad (37)$$

bestimmt:

$$\begin{aligned} v(h) = 0 &= \left(\frac{dp}{dx} - \rho g \sin \alpha \right) \frac{h^2}{2\eta} + c \\ \Leftrightarrow c &= - \left(\frac{dp}{dx} - \rho g \sin \alpha \right) \frac{h^2}{2\eta}. \end{aligned} \quad (38)$$

Da die Geschwindigkeit gemäß Aufgabenstellung nicht von x abhängt, muss $\frac{dp}{dx}$ konstant bezüglich x sein und es gilt

$$\frac{dp}{dx} = \frac{\Delta p}{l}, \quad \Delta p := p_2 - p_1. \quad (39)$$

Somit hat die Geschwindigkeit das Profil:

$$v(z) = \frac{1}{2\eta} \left(\frac{\Delta p}{l} - \rho g \sin \alpha \right) (z^2 - h^2) \quad (40)$$

Die maximale Geschwindigkeit ist an der Stelle $z = 0$:

$$v_0 = v(z = 0) = \frac{h^2}{2\eta} \left(\rho g \sin \alpha - \frac{\Delta p}{l} \right). \quad (41)$$

(b) Der Volumenstrom ist:

$$\begin{aligned} Q &= \int_A v(z) dA = b \int_{-h}^{+h} v(z) dz & (42) \\ &= 2 \frac{b}{2\eta} \left(\frac{\Delta p}{l} - \rho g \sin \alpha \right) \int_0^{+h} (z^2 - h^2) dz \\ &= \frac{b}{\eta} \left(\frac{\Delta p}{l} - \rho g \sin \alpha \right) \left[\frac{1}{3} z^3 - h^2 z \right]_0^h \\ &= \frac{2bh^3}{3\eta} \left(\rho g \sin \alpha - \frac{\Delta p}{l} \right). & (43) \end{aligned}$$

(c) Im Falle eines reibungsfreien Fluides wäre die notwendige Geschwindigkeit \bar{v} :

$$\bar{v} = \frac{Q}{A}. \quad (44)$$

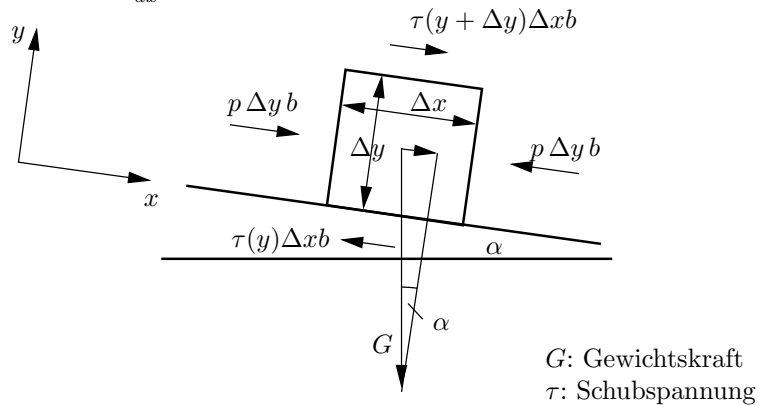
Mit dem Volumenstrom aus Aufgabenteil (b) und der Querschnittsfläche $A = 2bh$ folgt

$$\bar{v} = \frac{h^2}{3\eta} \left(\rho g \sin \alpha - \frac{\Delta p}{l} \right) \quad (45)$$

und durch den Vergleich mit Gleichung (41):

$$\bar{v} = \frac{2}{3} v_0. \quad (46)$$

an einem beliebigen Volumenelement $dx dy b$ (Beachte die Annahme $\frac{dp}{dx} = 0$):



G : Gewichtskraft
 τ : Schubspannung

$$0 = G \sin \alpha + \tau(y + \Delta y) \Delta x b - \tau(y) \Delta x b \quad (47)$$

mit $G = \rho g b \Delta x \Delta y$:

$$\rho g \Delta x \Delta y b \sin \alpha + \tau(y + \Delta y) \Delta x b - \tau(y) \Delta x b = 0 \quad (48)$$

$$-\rho g \sin \alpha = \frac{\tau(y + \Delta y) - \tau(y)}{\Delta y} \xrightarrow{\Delta y \rightarrow 0} \frac{d\tau}{dy} \quad (49)$$

Mit dem Newtonschen Reibungsgesetz

$$\tau = \eta \cdot \frac{du}{dy} \quad (50)$$

wird aus (49):

$$\frac{d^2 u}{dy^2} = \frac{-\rho \cdot g}{\eta} \cdot \sin \alpha \quad (51)$$

Durch Integration erhält man:

$$\frac{du}{dy} = -\frac{\rho \cdot g}{\eta} \cdot \sin \alpha \cdot y + c_1 \quad (52)$$

$$u = -\frac{\rho \cdot g}{\eta} \cdot \sin \alpha \cdot \frac{y^2}{2} + c_1 \cdot y + c_2 \quad (53)$$

Die Konstanten werden durch Einsetzen der Randbedingungen ermittelt:

Haftbedingung an der Wand:

$$u(y = 0) = 0 \Rightarrow c_2 = 0 \quad (54)$$

Schubspannung an der Oberfläche = 0:

$$\tau(y = \delta) = 0 \Rightarrow \frac{du}{dy} = 0 \Rightarrow c_1 = \frac{\rho \cdot g}{\eta} \cdot \sin \alpha \cdot \delta \quad (55)$$

Eingesetzt in (53) ergibt sich für die Geschwindigkeitsverteilung im Film (mit $\nu = \frac{\eta}{\rho}$, $\nu \dots$ kinematische Zähigkeit, $\eta \dots$ (dynamische, absolute) Zähigkeit):

$$\begin{aligned} u &= \frac{\rho \cdot g}{\eta} \sin \alpha \cdot \left(\delta \cdot y - \frac{y^2}{2} \right) \\ &= \frac{g \cdot \sin \alpha}{\nu} \cdot \left(\delta \cdot y - \frac{y^2}{2} \right) \end{aligned} \quad (56)$$

Aufgabe 81

Längs einer unter $\alpha = 60^\circ$ gegen die Waagerechte geneigten Platte der Breite $b = 0,5\text{m}$ fließt eine konstante Ölmenge $Q = 3\text{l/s}$ als dünner Film der Stärke δ .

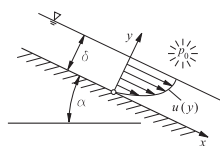
Annahme: Es stellt sich ein in x -Richtung konstantes Geschwindigkeits- und Druckprofil ein.

Man berechne

- (a) die Geschwindigkeit im Film und
- (b) die Filmdicke δ ($\nu = 0,436 \cdot 10^{-4} \text{m}^2/\text{s}$).

a) Geschwindigkeitsverteilung:

Aus der Impulsbilanz folgt das Kräftegleichgewicht wegen $u = \text{konst.} \Rightarrow$ keine Beschleunigung. In x -Richtung



b) Filmdicke δ :

Für die Durchflußmenge gilt:

$$Q = b \cdot \int_0^\delta u(y) dy \quad (57)$$

mit (56):

$$Q = b \cdot \int_0^\delta \left[\frac{g}{\nu} \cdot \sin \alpha \cdot \left(\delta \cdot y - \frac{y^2}{2} \right) \right] \cdot dy \quad (58)$$

$$= \frac{b \cdot g \cdot \sin \alpha}{\nu} \cdot \left[\frac{\delta \cdot y^2}{2} - \frac{y^3}{6} \right]_0^\delta \quad (59)$$

$$= \frac{b \cdot g \cdot \sin \alpha}{\nu} \cdot \frac{\delta^3}{3} \quad (60)$$

$$\delta = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot Q \cdot \nu}{b \cdot g \cdot \sin \alpha}} \quad (61)$$

eingesetzt:

$$\delta = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 0,003 \frac{\text{m}^3}{\text{s}} \cdot 0,436 \cdot 10^{-4} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}}{0,5 \text{m} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3}}} \quad (62)$$

$$= 4,52 \cdot 10^{-3} \text{ m} \quad (63)$$

$$= 4,52 \text{ mm} \quad (64)$$