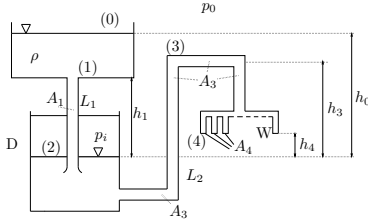


Tutorium

Aufgabe 63

Wasserleitung/BERNOULLISCHE Gleichung

Bestimme für das dargestellte System unter der Voraussetzung stationärer Verhältnisse



(a) den Innendruck p_i des Druckbehälters D,

(b) die maximal mögliche Anzahl von Entnahmestellen W unter der Bedingung, daß an keiner Stelle der Leitungen L_1 und L_2 Kavitation auftreten soll ($p > p_D$)!

Geg.: $h_0, h_1, h_3, h_4, A_1, A_3, A_4, \rho$, Umgebungsdruck p_0 , Dampfdruck p_D , mit $h_4 < h_3 < h_0$ und $\frac{A_1}{A_3} = A_3 = 10 A_4$, Erdbeschleunigung g .

Die Bernoullische Gleichung für einen stationären Stromfaden lautet (z nach oben positiv):

$$\frac{p}{\rho} + gz + \frac{v^2}{2} = \text{konst.}, \quad (\text{Bernoulli})$$

die Kontinuitätsgleichung

$$\rho Av = \text{konst.} \quad (\text{Konti})$$

(a) Der Behälter D wird als so groß angenommen, daß das Wasser darin zur Ruhe kommt ($v_2 = 0$). Für einen Stromfaden von (0) nach (2) gilt mit (Bernoulli)

$$\frac{p_0}{\rho} + gz_0 + \frac{v_0^2}{2} = \frac{p_2}{\rho} + gz_2 + \frac{v_2^2}{2} \quad (1)$$

mit $v_0 = v_2 = 0$ ergibt sich

$$p_i = p_2 = p_0 + \rho g(z_0 - z_2) \quad (2)$$

$$p_i = p_0 + \rho gh_0 \quad (3)$$

(b) Die größte Kavitationsgefahr besteht in einem Wasserrohr mit konstantem Querschnitt an der höchsten Stelle (bei Vernachlässigung der Reibung): Wegen Gleichung (Konti) ist v konstant und aus (Bernoulli) folgt dann: $p \sim -z + \text{konst.}$

Um den Druck im Rohr mit der Bernoullischen Gleichung (Bernoulli) auszurechnen, benötigen wir die Strömungsgeschwindigkeit v . Die ergibt sich aus dem Massenstrom ρAv , der ja nach Kontinuitätsgleichung (Konti) überall gleich sein muß. Bestimmt werden kann ρAv bei (4): $A = n \cdot A_4$, wobei n die Anzahl der Entnahmestellen ist. Die Geschwindigkeit v_4 ergibt sich mit (Bernoulli):

$$\frac{p_2}{\rho} + gz_2 + 0 = \frac{p_4}{\rho} + gz_4 + \frac{v_4^2}{2} \quad (4)$$

$p_2 = p_i$ ist bekannt aus (a), $p_4 = p_0$ und $z_4 - z_2 = h_4$

$$v_4 = \sqrt{2g(h_0 - h_4)} \quad (5)$$

Es wird also der Druck an den Stellen (1) und (3) überprüft. Für (1) ergibt sich mit (Konti):

$$v_1 = \frac{nA_4}{A_1} v_4 \quad (6)$$

und mit (Bernoulli) und mit $\frac{A_4}{A_1} = \frac{1}{20}$

$$\frac{p_0}{\rho} + gz_0 + 0 = \frac{p_1}{\rho} + gz_1 + \frac{v_1^2}{2} \quad (7)$$

$$p_1 = p_0 + \rho g(h_0 - h_1) - \rho g(h_0 - h_4) \frac{n^2}{400} \quad (8)$$

Für (3) ergibt sich analog:

$$v_3 = \frac{nA_4}{A_3} v_4 \quad (9)$$

$$p_3 = p_0 + \rho g(h_0 - h_3) - \rho g(h_0 - h_4) \frac{n^2}{100} \quad (10)$$

der Druck p_3 ist niedriger als p_1 , weil (3) höher liegt als (1) und der Querschnitt A_3 kleiner ist als A_1 und damit die Strömungsgeschwindigkeit v_3 größer als v_1 . Das kann an Gleichung (8) und (10) ablesen werden. Damit keine Kavitation auftritt, muß an den beiden kritischen Stellen (1) und (3) der Druck größer als der Dampfdruck p_D sein. Da $p_1 > p_3$ muß also gelten:

$$p_D < p_3 \Rightarrow n < 10 \sqrt{\frac{\frac{1}{\rho g}(p_0 - p_D) + (h_0 - h_3)}{h_0 - h_4}} \quad (11)$$

Aufgabe 72

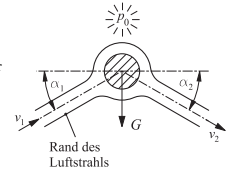
Ein Ball vom Gewicht G wird von einem Luftstrahl reibungsfrei umströmt und dadurch in der Schwebe gehalten. Der Strahl strömt unter dem Winkel α_1 mit der Geschwindigkeit v_1 an. Die Kompression der Luft in der Nähe des Balls kann ebenso vernachlässigt werden wie die Wirkung der Schwerkraft auf den Luftstrahl. Es soll keine horizontale Kraft vom Luftstrahl auf den Ball ausgeübt werden.

(a) Wie groß ist v_2 (Abströmgeschwindigkeit)?

(b) Wie groß ist der Abströmwinkel α_2 ?

(c) Welcher Massenstrom im Strahl ist erforderlich, damit der Ball schwebt?

Geg.: v_1, G, α_1, p_0



(a) Bernoulli:

$$p_0 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_0 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 \quad (12)$$

$$\Rightarrow v_1^2 = v_2^2 \Rightarrow |v_1| = |v_2| \quad (13)$$

(b) Impulssatz für einen Stromfaden:

$$\underline{F} = J(\underline{v}_2 - \underline{v}_1), \quad J = \text{Massenstrom} \quad (14)$$

horizontale Komponente

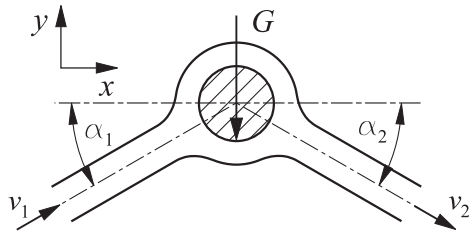
$$F_x = J(v_2 \cos \alpha_2 - v_1 \cos \alpha_1) \quad (15)$$

Annahme: keine Kraft in x-Richtung

$$0 = J(v_2 \cos \alpha_2 - v_1 \cos \alpha_1) \quad | \quad v_2 = v_1 \quad (16)$$

$$\Rightarrow \alpha_2 = \alpha_1 \quad (17)$$

(c) vertikale Komponente des Impulssatzes:



$$F_y = -G = J(-v_2 \sin \alpha - v_1 \sin \alpha) \quad (18)$$

mit $v_2 = v_1$, $\alpha_2 = \alpha_1$:

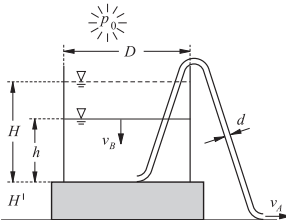
$$J = \frac{G}{2v_1 \sin \alpha} \quad (19)$$

ist der erforderliche Massenstrom.

Hausaufgaben

Aufgabe 62

Auf einem Podest der Höhe $H' = 0,5\text{m}$ steht ein großes Gefäß (Durchmesser $D = 1\text{m}$), welches bis zu Höhe $H = 1\text{m}$ mit Wasser gefüllt ist (vgl. nebenstehende Skizze). Dieses Gefäß wird mit Hilfe eines Schlauches (Durchmesser $d = 1\text{cm}$) nach dem Heberprinzip entleert.



- (a) Wie groß ist bei reibungsloser Strömung die Wasseraustrittsgeschwindigkeit $v_A = f(h)$ am Schlauchende in Abhängigkeit von der veränderlichen Wasserhöhe h im Behälter?
 (b) Wie groß ist bei reibungsloser Strömung die Entleerungszeit T des Behälters?

(a) Austrittsgeschwindigkeit v_A in Abhängigkeit vom Wasserstand h :

Aufgrund des großen Gefäßdurchmessers D ändert sich der Wasserstand h nur sehr langsam. Im gesamten System können daher die Strömungsgeschwindigkeiten wieder als annähernd konstant angesehen werden, sodaß ein quasi-stationärer Ansatz gewählt werden kann.

Stationäre, reibungslose Bernoulli-Gleichung von der Wasseroberfläche B bis zum Ausfluß A (Höhenform):

$$\frac{p_0}{\rho \cdot g} + \frac{v_B^2}{2g} + (H' + h) = \frac{p_0}{\rho \cdot g} + \frac{v_A^2}{2g} + 0 \quad (20)$$

Nach der Kontinuitätsgleichung gilt:

$$v_B = \left(\frac{d}{D}\right)^2 \cdot v_A \ll v_A \quad (21)$$

Die Sinkgeschwindigkeit v_B des Wasserspiegels ist wieder sehr klein und somit in der Bernoulli-Gleichung gegenüber der Ausströmgeschwindigkeit v_A vernachlässigbar. Man erhält somit für v_A :

$$v_A = \sqrt{2g(H' + h)} \quad (22)$$

Ausflußformel von Torricelli.

(b) Entleerungszeit T :

Die Entleerungszeit bei reibungsloser Strömung erhält man durch Integration der Gleichung:

$$v_B = -\frac{dh}{dt} \quad (23)$$

$$\Rightarrow T = \int_{t=0}^T dt = -\int_{h=H}^0 \frac{1}{v_B} dh = \int_{h=0}^H \frac{1}{v_B} dh \quad (24)$$

Mit $v_B = \left(\frac{d}{D}\right)^2 \cdot v_A$ und $v_A = \sqrt{2g(H' + h)}$ erhält man:

$$T = \left(\frac{D}{d}\right)^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2g}} \cdot \int_{h=0}^H \frac{dh}{\sqrt{H' + h}} \quad (25)$$

$$= \left(\frac{D}{d}\right)^2 \frac{1}{\sqrt{2g}} \left(2\sqrt{H' + h}\right) \Big|_0^H \quad (26)$$

$$T = \left(\frac{D}{d}\right)^2 \cdot \sqrt{\frac{2}{g}} \left(\sqrt{H' + H} - \sqrt{H'}\right) \quad (27)$$

Mit den Werten der Aufgabenstellung:

$$T = \left(\frac{1\text{m}}{0,01\text{m}}\right)^2 \sqrt{\frac{2}{9,81\text{m/s}^2}} \quad (28)$$

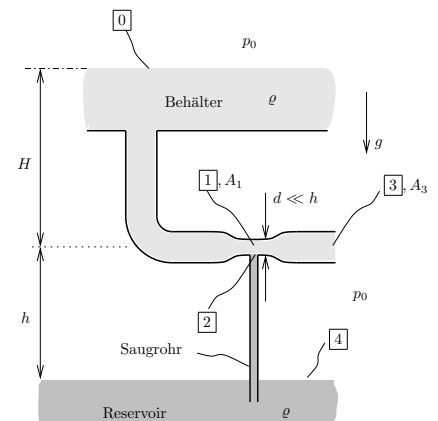
$$\cdot \left(\sqrt{0,5\text{m} + 1\text{m}} - \sqrt{0,5\text{m}}\right) \quad (29)$$

$$T = 2337\text{s} \quad (30)$$

Aufgabe 65

Eine Rohrleitung unter einem Wasserbehälter mündet ins Freie (Umgebungsdruck p_0). Mit Hilfe einer düsenförmigen Verengung und einem Saugrohr soll aus einem unteren Reservoir Wasser gefördert werden (Höhendifferenz zur Düse h).

- (a) Wie groß ist der Druck p_2 an der Stelle [2] zwischen Saugrohr und Düse, wenn das Saugrohr mit stehendem (also ruhendem) Wasser gefüllt ist?
 (b) Welcher Zusammenhang muss zwischen dem Druck p_1 und dem eben berechneten Druck p_2 gelten, damit das Wasser aus dem Saugrohr sogar in die Düse hineingesaugt wird? (Annahme $d \ll h$)
 (c) Berechnen Sie mithilfe der Bernoulli-Gleichung $\frac{v^2}{2} + p + \rho g z = \text{const.}$ zwischen [1] und [3] den Druck p_1 an der Stelle [1] abhängig von v_1 und v_3 .
 (d) Wie ist der Zusammenhang zwischen v_1 und v_3 ? (Massenbilanz, Kontinuitätsgleichung zwischen [1] und [3])
 (e) Formulieren Sie die Bernoulli-Gleichung nun noch zwischen [0] und [3].
 (f) Bestimmen Sie die Querschnittsfläche der Düse A_1 , so dass Wasser angesaugt werden kann. Kontrollieren Sie die Einheiten in Ihrem Ergebnis.



Geg.: H, h, ρ, g, p_0, A_3 .

(a) Der Druck p_2 an der Stelle [2] ergibt sich aus der Bernoulli-Gleichung zwischen [4] und [2]. Die Flüssigkeit im Saugrohr ruht, der dynamische Druck an der Stelle [2] ist also $q_2 = 0$ und der Druck ergibt sich zu

$$p_2 = p_0 - \rho g h \quad (31)$$

(Die Annahme aus Aufgabenteil **b**) $d \ll h$ fand hier schon Verwendung.)

(b) Damit Wasser aus dem Saugrohr in die Düse gesaugt wird muss ein Druckgefälle zwischen $\boxed{1}$ und $\boxed{2}$ bestehen. Aus der Annahme $d \ll h$ folgt, dass im gesamten Düsenquerschnitt $\boxed{1}$ der gleiche Druck p_1 herrscht. Als Bedingung ergibt sich also

$$p_1 < p_2 \quad (32)$$

(c) Der Druck an der Stelle $\boxed{3}$ ist der Umgebungsdruck $p_3 = p_0$ (Freistrah). Die Bernoulligleichung zwischen $\boxed{1}$ und $\boxed{3}$ lautet daher

$$p_1 + \frac{\rho}{2}v_1^2 = p_0 + \frac{\rho}{2}v_3^2$$

daraus folgt für den Druck an der Stelle $\boxed{1}$

$$p_1 = p_0 + \frac{\rho}{2}(v_3^2 - v_1^2) \quad (33)$$

(d) Die Kontigleichung zwischen $\boxed{1}$ und $\boxed{3}$ stellt den Zusammenhang zwischen den Geschwindigkeiten v_1 und v_3 her.

$$v_1 A_1 = v_3 A_3$$

daraus ergibt sich die Geschwindigkeit an der Stelle $\boxed{1}$

$$v_1 = \frac{A_3}{A_1} v_3 \quad (34)$$

(e) Die Bernoulligleichung zwischen $\boxed{0}$ und $\boxed{3}$ lautet

$$p_0 + \rho g H = p_0 + \frac{\rho}{2}v_3^2$$

daraus ergibt sich die Geschwindigkeit an der Stelle $\boxed{3}$ (siehe auch Torricelli)

$$v_3 = \sqrt{2gH} \quad (35)$$

(f) Setzt man nun (35) in (34) ein so erhält man

$$v_1 = \frac{A_3}{A_1} \sqrt{2gH}$$

Dies und (35) in (33) eingesetzt ergibt

$$p_1 = p_0 + \frac{\rho}{2} \left(\left[\sqrt{2gH} \right]^2 - \left[\frac{A_3}{A_1} \sqrt{2gH} \right]^2 \right)$$

$$p_1 = p_0 + \frac{\rho}{2} \left(1 - \left[\frac{A_3}{A_1} \right]^2 \right) 2gH$$

$$p_1 = p_0 + \left(1 - \left[\frac{A_3}{A_1} \right]^2 \right) \rho g H \quad (36)$$

Gleichungen (36) und (31) stellen die beiden Seiten von (32) dar. Eingesetzt ergibt

$$p_0 + \left(1 - \left[\frac{A_3}{A_1} \right]^2 \right) \rho g H < p_0 - \rho g h$$

$$- \left[\frac{A_3}{A_1} \right]^2 < - \frac{h}{H} - 1$$

$$A_3^2 > A_1^2 \left(\frac{h}{H} + 1 \right)$$

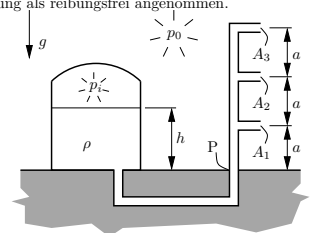
$$A_3 > A_1 \sqrt{\frac{h}{H} + 1} \iff A_1 < A_3 \sqrt{\frac{H}{H+h}}$$

$$[A_1] = m^2 = [A_3]$$

Aufgabe 70

Ein Wasserleitungssystem wird aus einem Druckbehälter gespeist. Aus allen drei Austrittsquerschnitten soll der gleiche Volumenstrom austreten. Die Füllhöhe h des Druckbehälters sei konstant. Das Wasser wird als inkompressibel und die Strömung als reibungsfrei angenommen.

- (a) Berechnen Sie die dazu erforderlichen Querschnitte A_2 und A_3 !
 (b) Berechnen Sie das Moment um den Punkt P, das durch den Rückstoß des austretenden Wassers entsteht. *Hinweis:* Die Ergebnisse für v_1 , v_2 und v_3 aus Aufgabenteil (a) sollen nicht eingesetzt werden.



Geg.: $A_1, p_0, p_i, a, h, \rho, g$.

(a) Gesucht A_2 und A_3 wobei $V_i A_i = \text{const}$ gegeben ist! Bernoulli zw. (0) und (1):

$$\frac{p_i}{\rho_w} + \frac{v_0^2}{2} + gh = \frac{p_0}{\rho_w} + \frac{v_1^2}{2} + ga \quad (37)$$

$$\Rightarrow \frac{v_1^2}{2} = \frac{p_i - p_0}{\rho_w} + g(h - a) \quad (38)$$

$$v_1 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{p_i - p_0}{\rho_w} + g(h - a)} \quad (39)$$

$$\text{analog: } (0) \rightarrow (2) v_2 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{p_i - p_0}{\rho_w} + g(h - 2a)} \quad (40)$$

$$(0) \rightarrow (3) v_3 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{p_i - p_0}{\rho_w} + g(h - 3a)} \quad (41)$$

$$v_1 \cdot A_1 = v_2 \cdot A_2 \quad (42)$$

$$\Rightarrow A_2 = A_1 \cdot \frac{v_1}{v_2} = A_1 \sqrt{\frac{\frac{p_i - p_0}{\rho_w} + g(h - a)}{\frac{p_i - p_0}{\rho_w} + g(h - 2a)}} \quad (43)$$

$$\text{analog: } A_3 = A_1 \cdot \frac{v_1}{v_3} = A_1 \sqrt{\frac{\frac{p_i - p_0}{\rho_w} + g(h - a)}{\frac{p_i - p_0}{\rho_w} + g(h - 3a)}} \quad (44)$$

(b) Kraft des austretenden Wassers auf ein Rohr:

$$F_k = v_k \cdot \dot{m}_k = v_k \cdot \rho \cdot A_k v_k = \rho A_k v_k^2 \quad (45)$$

Alle Kräfte wirken in entgegengesetzte Richtung zum ausfließenden Wassers. Moment aller Kräfte:

$$M = aF_1 + 2aF_2 + 3aF_3 = \sum_{k=1}^3 kaF_k = \sum_{k=1}^3 ka\rho A_k v_k^2 \quad (46)$$

$$\text{da } A_k \cdot v_k = \text{const} = A_1 v_1 \quad (47)$$

$$\Leftrightarrow M = a\rho A_1 v_1 \sum_{k=1}^3 kv_k = a\rho A_1 v_1 (v_1 + 2v_2 + 3v_3) \quad (48)$$

Das Moment auf die Leitung im Punkt P wirkt gegen den Uhrzeigersinn.