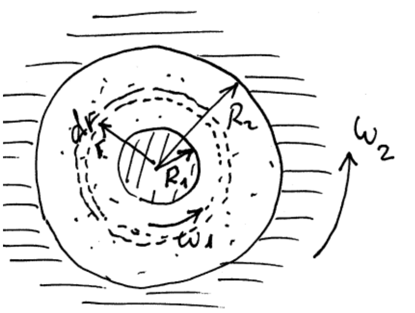
Ausgewählte Kapitel aus der Kontinuumsmechanik

I. Strömung zwischen zwei konzentrisch rotierenden Zylindern (z.B. ein hydrodynamisch geschmiertes Gleitlager).



Viskose Spannungen entstehen in einer Flüssigkeit nur dann, wenn sie nicht *als Ganzes* eine Translations- oder Rotationsbewegung ausführt. Bezeichnen wir die tangentiale Komponente der Geschwindigkeit als $v_\varphi = v(r)$. Die viskose Spannung berechnet sich als

$$\tau = \eta \frac{v(r+dr) - v(r)\left(1+dr/r\right)}{dr} = \eta\left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}\right).$$

Dieser Ausdruck zeigt, daß nur die *Abweichung der Geschwindigkeit von dem Wert, den die Flüssigkeit bei einer starren Rotation hätte*, eine Rolle spielt. Das auf eine Zylinderfläche mit dem Radius r wirkende Kraftmoment ist gleich

$$M = \tau \cdot 2\pi r l \cdot r = 2\pi l \cdot \eta\left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}\right)\cdot r^2 .$$

Bei einer stationären Bewegung muß dieses Moment konstant bleiben:

$$\left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}\right)\cdot r^2 = konst .$$

Diese Gleichung ist erfüllt wenn entweder $v \propto r$ oder wenn $v \propto 1/r$. Die allgemeine Lösung ist

$$v = C_1 r + \frac{C_2}{r} .$$

Aus den Randbedingungen
$v(R_1) = \omega_1 R_1$ und $v(R_2) = \omega_2 R_2$ folgt

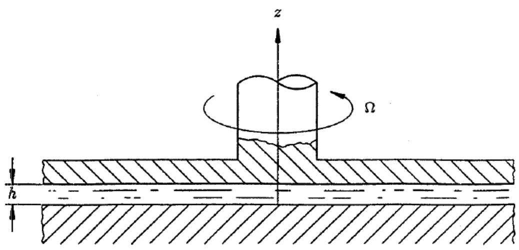
$$C_1 = \frac{\omega_2 R_2^2 - \omega_1 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2}, \quad C_2 = \frac{\left(\omega_1 - \omega_2\right) R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} .$$

Das Kraftmoment berechnet sich zu

$$M = 2\pi l \cdot \eta\left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}\right)\cdot r^2 = 4\pi l \eta C_2 \text{ oder}$$

$$M = 4\pi l \eta \frac{\left(\omega_1 - \omega_2\right) R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} .$$

II. Stationäre Strömung zwischen einer rotierenden Scheibe und einer festen Wand (Viskosimeter)



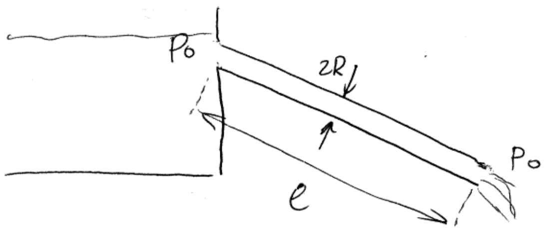
Im Abstand r von der Achse ist die Tangentialspannung gleich $\tau = \eta \frac{\Omega r}{h}$. Das gesamte auf die Achse wirkende Moment ist gleich

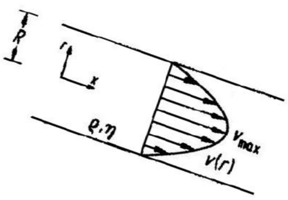
$$M = \int_0^R \tau(r)\cdot \underbrace{2\pi r dr}_{dA} \cdot r = \int_0^R 2\pi\eta \frac{\Omega}{h} r^3 dr = \frac{\pi\eta\Omega R^4}{2h}$$

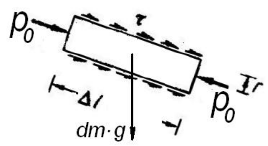
Aus dem Moment kann die Viskosität berechnet werden.

III. Strom in einem geneigten Rohr

Zu bestimmen ist der Volumenstrom in einem geneigten Rohr ohne Druckdifferenz (Viskosität der Flüssigkeit sei η).







Gemäß der Newtonschen Regel gilt für die Tangentialspannung $\tau\left(r\right) = \eta \frac{\partial v\left(r\right)}{\partial r}$.

Wir schneiden einen *koaxialen Zylinder* mit dem Radius r und Länge Δl frei und berechnen die auf ihn wirkenden Kräfte (in *x*-Richtung): viskose Kraft

$F_{\text{visk}} = \tau \cdot A = \eta \frac{\partial v}{\partial r} \cdot 2\pi r \cdot \Delta l$ und Schwerekraft

$F_{\text{s}} = \rho g \pi r^2 \Delta l \sin\alpha$.

Da die Flüssigkeit sich mit konstanter Geschwindigkeit bewegt, muß die auf das gewählte Element wirkende Kraft verschwinden:

$$\eta \frac{\partial v}{\partial r} \cdot 2\pi r \cdot \Delta l + \rho g \pi r^2 \Delta l \sin\alpha = 0$$

Daraus folgt $\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{\rho g r \sin\alpha}{2\eta}$.

Unbestimmte Integration über r ergibt

$$v(r) = -\frac{\rho g \sin\alpha}{4\eta} r^2 + C.$$

Randbedingung:

$$v(R) = 0 \Rightarrow \quad C = \frac{\rho g \sin\alpha}{4\eta} R^2;$$

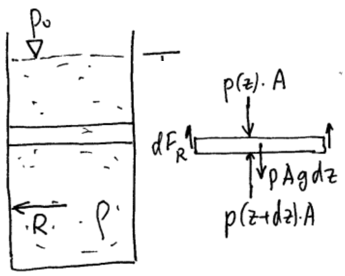
$$v(r) = \frac{\rho g \sin\alpha}{4\eta} R^2 \left[1 - (r/R)^2\right].$$

Volumenstrom:

$$\boxed{Q = \int_0^R 2\pi r v(r)\, dr = \frac{\pi R^4 \rho g \sin\alpha}{8\eta}}.$$

IV. Druck in einem mit Sand gefüllten Zylinder (Radius *R*).

Der Reibungskoeffizient des Sandes mit der Wand sei μ. Falls er nicht zu groß ist, ist der Druck im Sand "fast isotrop" (wie in einer Flüssigkeit). Betrachten wir das Kräftegleichgewicht an einem infinitesimalen Ausschnitt aus der Sandsäule:



$$\rho g \pi R^2 dz + \left(p(z) - p(z+dz)\right)\pi R^2 - dF_R = 0.$$

oder

$$\rho g \pi R^2 dz - \frac{dp}{dz} dz \cdot \pi R^2 - dF_R = 0$$

Die Reibungskraft ergibt sich aus dem Coulombschen Gesetz: $dF_R = \mu p 2\pi R dz$. Aus den beiden Gleichungen erhält man

$$\rho g - \frac{dp}{dz} - 2\frac{\mu p}{R} = 0.$$

Trennung der Variablen $dz = \frac{dp}{\left(\rho g - 2\mu p / R\right)}$

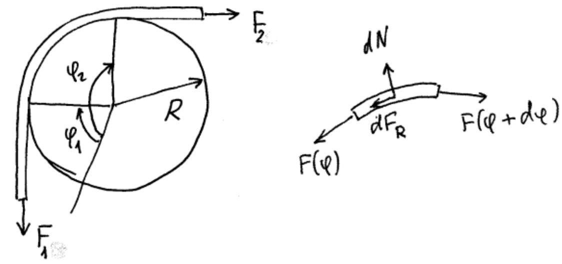
und Integration ergibt

$$\boxed{p = \frac{\rho g R}{2\mu}\left(1 - e^{-\frac{2\mu z}{R}}\right)}.$$

Bei großen z erreicht der Druck den Sättigungswert $p_\infty = \rho g R / 2\mu$.

V. Seilreibung

Bisher haben wir Kontinua unter Berücksichtigung entweder elastischer Kräfte oder viskoser Reibung betrachtet. Im nächsten Beispiel diskutieren wir Einfluss von Coulombscher Reibung.



Ein Seil wird um einen zylinderförmigen Poller geschlungen. Der Kontaktwinkel zwischen Seil und Poller betrage $\alpha = \varphi_2 - \varphi_1$. Das Seil wird in Richtung F_2 gezogen. Zu bestimmen ist die Kraft F_1, die notwendig ist, um es von der Bewegung abzuhalten.

Lösung: Betrachten wir ein infinitesimal kleines Element des Seils. Das Kräftegleichgewicht in Längsrichtung des Elementes lautet

$F(\varphi + d\varphi) - F(\varphi) - dF_R = 0$ oder

$$\frac{dF}{d\varphi} d\varphi - dF_R = 0.$$

In der dazu senkrechten Richtung gilt

$dN - F d\varphi = 0$.

Hier sind: dN die auf das Element wirkende Reaktionskraft und dF_R die auf es wirkende Reibungskraft. Das Seil gleitet gerade noch nicht, wenn die Reibungskraft ihren Maximalwert $dF_R = \mu dN$ erreicht. Aus diesen drei Gleichungen ergibt sich $\frac{dF}{d\varphi} = \mu F$.

Nach der Trennung der Variablen $\frac{dF}{F} = \mu d\varphi$ und Integration erhalten wir

$$\ln F\Big|_{F_1}^{F_2} = \mu(\varphi_2 - \varphi_1) = \mu\alpha \Rightarrow$$

$$\boxed{F_2 = F_1 e^{\mu\alpha}}.$$

Beispiel: $\mu = 0.4$, $\alpha = 2\pi \Rightarrow F_2 \approx 12 F_1$.