Kontinuumsmechanik / Prof. Popov / Vorlesung 12.
Beispiele aus der Hydrostatik und Hydrodynamik
Lit.: Gross, Hauger, Schnell und Wriggers, „Technische Mechanik 4", Kapitel 1.3.3.1, 1.3.3.3, 1.3.3.4

I. Kavitation

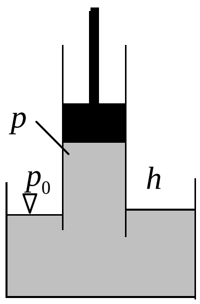
Tritt in einer Flüssigkeit ein Druck *kleiner als der gesättigte Dampfdruck* bei gegebener Temperatur auf, so beginnt sie zu sieden und es bilden sich Dampfblasen. Mechanisch gesehen bedeutet das, daß die Kontinuitätsbedingung verletzt wird und die Wassersäule "zerreißt". Daraus folgt:

> In ruhender Flüssigkeit darf der Druck an keinem Ort unter den gesättigten Dampfdruck p_D fallen.

Für Temperaturen viel kleiner als die Siedetemperatur kann der Dampfdruck annähernd als Null angenommen werden. Unter dieser Annahme darf der Druck in einer Flüssigkeit nie einen negativen Wert annehmen.

Durch Kavitation verursachter Verschleiß
Wird der Druck wieder größer, fallen die Blasen zusammen. Dabei entstehen nach dem Mechanismus von einem "kumulativen Strahl" die sogenannten "micro jets", mit Geschwindigkeiten in der Größenordnung der Schallgeschwindigkeit *c*. Beim Treffen von Mikrojets auf eine feste Oberfläche entwickelt sich ein Druck von ca. $p_{\text{Schlag}} \simeq \rho c^2$. Für Wasser: $p_{\text{Schlag}} \approx 10^3 10^6\,\text{Pa} = 1000\,\text{MPa}$.
Solche Drucke führen zum schnellen Verschleiß von festen Oberflächen.

II. Kolbenpumpe.



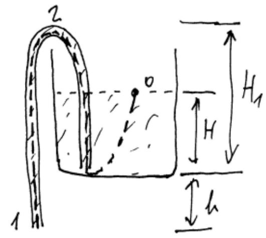
Wie hoch kann das Wasser dem Kolben in einer einfachen Kolbenpumpe folgen?

Lösung: Im statischen Gleichgewicht gilt: $p_0 = p + \rho g h$.

Vom rein mechanischen Gesichtspunkt kann *h* beliebig groß sein. Der Druck unter dem Kolben $p = p_0 - \rho g h$ wird aber bei $h > p_0/\rho g \approx \frac{10^5}{10\cdot 10^3} = 10\ \text{m}$ negativ. Deshalb kann das Wasser mit der o.g. Pumpe nicht höher als auf 10 m gepumpt werden.

Beispiel. Wie hoch kann das Wasser beim normalen atmosphärischen Druck und t=100°C gepumpt werden?

III. Heber



Wie groß ist die Wasseraustrittsgeschwindigkeit? Wie groß ist der Druck im Punkt 2?

Lösung: Betrachten wir eine Stromlinie 0-2-1. Die Bernoulli-Gleichung (für Punkte 0 und 1) lautet

$$\cancel{\frac{p_0}{\rho}} + \cancel{\frac{v_0^2}{2}} + gH = \cancel{\frac{p_1}{\rho}} + \frac{v_1^2}{2} - gh\,.$$

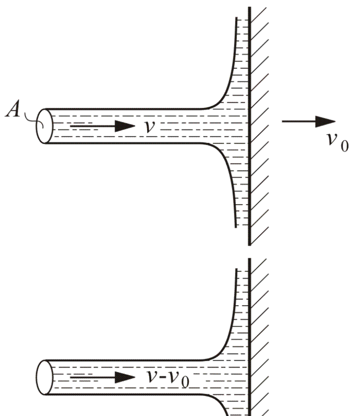
Daraus folgt $v_1 = \sqrt{2g\left(H+h\right)}$.

Bernoulli-Gleichung (für Punkte 0 und 2)

$$\frac{p_0}{\rho} + \cancel{\frac{v_0^2}{2}} + gH = \frac{p_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2} + gH_1\,.$$

Aus der Kontinuitätsbedingung folgt $v_2 = v_1$.
Für den Druck p_2 ergibt sich
$p_2 = p_0 - \rho g\left(h + H_1\right)$. Der Heber funktioniert nur solange dieser Druck großer als der gesättigte Dampfdruck p_D ist.

Ein Beispiel zum Impulssatz. Zu berechnen ist die Leistung eines auf eine Schaufel fallenden Strahls. Die Schaufel bewegt sich mit der Geschwindigkeit v_0.

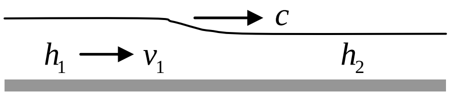


Lösung: Im Bezugssystem, das sich mit der Schaufel bewegt, ist die Strahl-Geschwindigkeit $\left(v - v_0\right)$. Der Strahl wirkt auf die Schaufel mit der Kraft $F = A\rho\left(v - v_0\right)^2$.
Die Leistung dieser Kraft (jetzt wieder im ursprünglichen Bezugssystem) ist.

$$P = F\cdot v_0 = A\rho v_0\left(v - v_0\right)^2.$$

Sie erreicht ein Maximum, wenn $dP/dv_0 = 0$;
Daraus folgt $v_0 = v/3$. Die Geschwindigkeit der Schaufel muß 1/3 der Strahlgeschwindigkeit sein.

IV. Tsunami-Welle



In einem ebenen Wasserbecken breitet sich eine Welle in Form einer Stufe aus. Wie groß ist ihre Geschwindigkeit? Die Reibungskräfte können vernachlässigt werden.
Lösung: Wir gehen über in ein Bezugssystem, das sich zusammen mit der Welle bewegt.

In diesem System ist die Strömung stationär. Das Wasser fließt von rechts mit der Geschwindigkeit c ein und fließt mit der Geschwindigkeit $v = c - v_1$ aus. Betrachten wir eine Stromlinie, die rechts auf der Höhe z_2 läuft und links auf der Höhe z_1. Die Bernoulli-Gleichung für diese Stromlinie lautet

$$p_2 + \rho g z_2 + \rho \frac{c^2}{2} = p_1 + \rho g z_1 + \rho \frac{v^2}{2}.$$

Da der Aussendruck p_0 überall der gleiche ist, gilt $p_2 = p_0 + \rho g (h_2 - z_2)$, $p_1 = p_0 + \rho g (h_1 - z_1)$. Einsetzen in die Bernoulli-Gleichung ergibt

$$g h_2 + \frac{c^2}{2} = g h_1 + \frac{v^2}{2}. \qquad (1)$$

Daraus ist im Übrigen ersichtlich, dass die Geschwindigkeit v von der Höhe nicht abhängt: Wir haben es mit einer homogenen Strömung zu tun. Die Kontinuitätsgleichung ergibt

$$c h_2 = v h_1. \qquad (2)$$

Lösung von (1) und (2):

$$c = \sqrt{2 g h_1^2 / \left(h_1 + h_2\right)}.$$

Wenn die Höhe der Stufe klein ist, $\boxed{c = \sqrt{g h_1}}$.
Bei $h \sim 6000\,\mathrm{m}$ ist

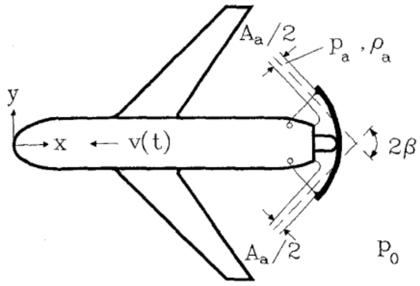
$$c = \sqrt{60000} \approx 245\,\mathrm{m/s} \approx 880\,\mathrm{km/h}.$$

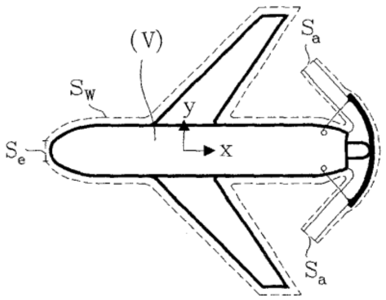
Die Geschwindigkeit der Strömung $v_1 = c - v = c\left(1 - h_1/h_2\right) = c\Delta h / h$. Bei einer 1 Meter hohen Stufe

$$v_1 \approx 245\,\mathrm{m/s} \cdot 1\,\mathrm{m} / 6000\,\mathrm{m} \approx 4\,\mathrm{cm/s}.$$

V. Schubumkehr (*Ein Verfahren zum Abbremsen eines Flugzeugs am Boden*)

Nach dem Aufsetzen werden bei großen Flugzeugen oft zwei Schilde hinter dem Strahltriebwerk ausgefahren, die den austretenden Strahl in zwei Teilstrahlen aufspalten und diese um den Winkel $\pi - \beta$ umlenken. Zu berechnen ist die Verzögerung des Flugzeugs.





In einem mit dem Flugzeug verbundenen Bezugssystem erhalten wir für die auf das Flugzeug wirkende Kraft:

$$F = \rho_a v_a v_a \cos\beta \cdot A.$$

Daraus folgt für die Beschleunigung

$$\boxed{a = -\frac{\rho_a {v_a}^2 \cos\beta \cdot A}{m}}$$