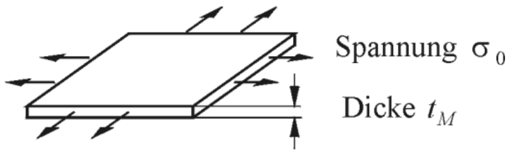
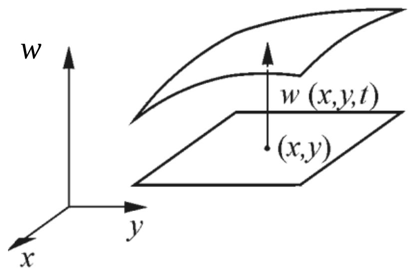
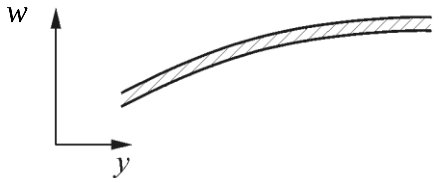
I. Bewegungsgleichung für eine Membran. Genauso wie eine Saite, hat eine *Membran* keine Biegesteifigkeit. Sie wird erst durch eine Vorspannung elastisch. Betrachten wir eine in allen Richtungen gleich gespannte Membran (Spannung σ_0).





Zunächst betrachten wir eine Biegung, die nur von einer Koordinate y abhängt: $w = w(y,t)$ und "schneiden" aus der Membran ein Streifen mit der Tiefe dx.

Schnitt in der (W, y) - Ebene



$$dm \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = S(w'(y+dy) - w'(y))$$

$$= S\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}dy = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}dy\left[\sigma_0 dx t_M\right]$$

Daraus folgt

$$\underbrace{\rho t_M dxdy}_{dm}\,\ddot{w} = \sigma_0 t_M \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}dxdy \;\Rightarrow\; \rho\ddot{w} = \sigma_0\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

oder

$$\boxed{\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}} \quad \text{mit} \quad c^2 = \boldsymbol{\sigma}_0 / \boldsymbol{\rho}$$

Mit Berücksichtigung der Biegung in der x - Richtung:

$$\boxed{\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)} \quad \text{mit} \quad c^2 = \boldsymbol{\sigma}_0 / \boldsymbol{\rho}$$

Zweidimensionale Wellengleichung

Die Ableitungen auf der rechten Seite verkürzt man oft zu

$$\Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2},$$

wobei $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ der Laplace-Operator ist.

Die Wellengleichung kann dann auch in der Form $\boxed{\ddot{w} = c^2 \Delta w}$ geschrieben werden.

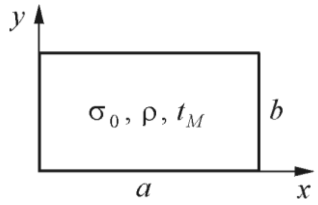
II. Bernoulli-Ansatz. Die zweidimensionale Wellengleichung kann immer mit dem Bernoulli-Ansatz gelöst werden:

$w(x,y,t) = W(x,y)\cdot\cos\omega t$

Das ist besonders sinnvoll, wenn nach Eigenfrequenzen gefragt wird. Einsetzen in die Wellengleichung liefert für den Ortsteil des Ansatzes die folgende Gleichung

$$\underbrace{\Delta W + k^2 W = 0}_{\text{Helmholtz-Gleichung}} \quad \text{mit} \quad k = \omega / c$$

Beispiel 1: Gegeben ist eine Rechteckmembran mit fest gelagerten Rändern. Zu finden sind die Eigenschwingungsformen und die Eigenfrequenzen.



Lösung: Die Lösung in Form eines Bernoulli-Ansatzes lautet: $w(x,y,t) = W(x,y)\cdot\cos\omega t$

Die Ortsfunktion $W(x,y)$ suchen wir wiederum in Form eines Produktes

$W(x,y) = X(x)Y(y)$

mit

$$\begin{cases} X = A\cos\alpha x + B\sin\alpha x \\ Y = C\cos\beta y + D\sin\beta y \end{cases}$$

Einsetzen in die Helmholtz-Gleichung ergibt

$\alpha^2 + \beta^2 = k^2$

Jetzt benutzen wir die Randbedingungen:

$W(0,y) = 0 \rightarrow X(0) = 0 \qquad A = 0$

$W(a,y) = 0 \rightarrow X(a) = 0 \qquad B\sin\alpha a = 0$

$W(x,0) = 0 \rightarrow Y(0) = 0 \qquad C = 0$

$W(x,b) = 0 \rightarrow Y(b) = 0 \qquad D\sin\beta b = 0$

Daraus folgt

$$\sin\alpha a = 0 \rightarrow \alpha_m = m\pi/a \qquad m = 0,1,2,...$$

$$\sin\beta b = 0 \rightarrow \beta_m = n\pi/b \qquad n = 0,1,2,...$$

$$k_{mn} = \sqrt{\alpha_m^2 + \beta_n^2} = \pi\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}$$

Die Eigenfrequenzen sind somit

$$\omega_{mn} = k_{mn}c = \pi c\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}$$

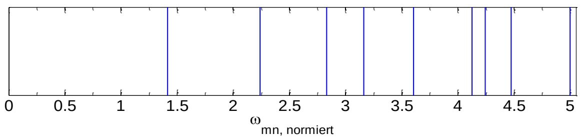


Bild 1. Verteilung von Eigenfrequenzen einer Membran bei $a = b$ normiert auf $\pi c/a$.

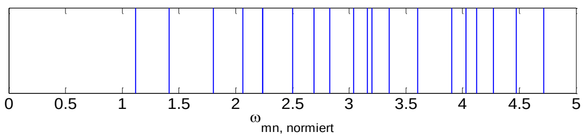
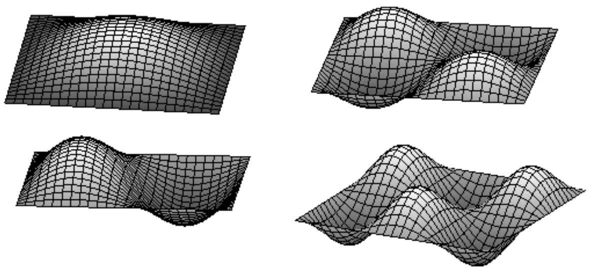


Bild 2. Dasselbe bei $b = 2a$ normiert auf $\pi c/a$.

Die Eigenfunktionen sind :

$$W_{mn} = \sin\frac{m\pi x}{a}\cdot\sin\frac{n\pi y}{b}$$

Die ersten vier Eigenschwingungsformen:



Eine weiterführende Bemerkung: Die allgemeine Lösung der 2D-Wellengleichung kann nicht nur in der Form $w = \sin kx$, $w = \sin ky$ oder dem Produkt daraus gesucht werden, sondern auch in der allgemeineren Form $w = \sin(k_x x + k_y y) = \sin(\vec{k}\cdot\vec{r})$. Den Vektor $\vec{k} = (k_x, k_y)$ nennt man *Wellenvektor*. Der Wellenvektor steht immer senkrecht zu den Linien konstanter Phase. Er gibt die Richtung der Wellenausbreitung an.

III. Plattenschwingungen

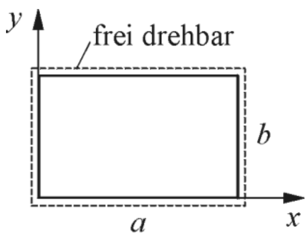
$$\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{D}{h}\Delta\Delta w = 0 \;; \qquad D = \frac{Eh^3}{12\left(1-\nu^2\right)}, \text{(1)}$$

h - Dicke, E - Elastischer Modul, ν - Poisson-Zahl, ρ - Dichte. Der Operator $\Delta\Delta$ entspricht einem zweimal nacheinander angewendeten Laplace-Operator:

$$\Delta\Delta \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$$

$$= \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$$

Beispiel: zu bestimmen sind die Eigenfrequenzen einer am Rand frei drehbar gelagerter Platte



Benutzen wir gleich den Ansatz

$$W(x, yt) = F\sin\alpha x\cdot\sin\beta y\cos\omega t,$$

der die Randbedingungen bei $x = 0$ und $y = 0$ erfüllt.

Einsetzen in die Gleichung (1) liefert

$$-\rho\omega^2 + \frac{D}{h}\left(\alpha^2 + \beta^2\right)^2 = 0. \qquad \text{Daraus:}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{\rho h}}\left(\alpha^2 + \beta^2\right)$$

Aus den Randbedingungen folgt

$$\alpha_m = \pi m/a \,, \quad \beta_m = \pi n/b \,, \text{ und somit}$$

$$\omega_{n,m} = \pi^2\sqrt{\frac{D}{\rho h}}\cdot\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right).$$

Die ersten Eigenformen sind dieselben wie bei einer Membran, aber die Frequenzen sind verschieden.

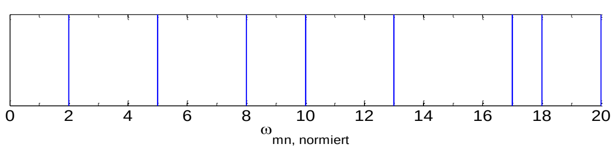


Bild 3. Verteilung von Eigenfrequenzen einer Platte bei $a = b$ normiert auf $\pi^2/a^2\cdot\sqrt{D/\rho h}$.

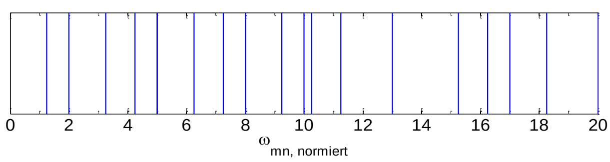


Bild 4. Dasselbe bei $b = 2a$ normiert auf $\pi^2/a^2\cdot\sqrt{D/\rho h}$.