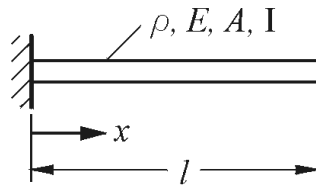


**Biegeschwingungen von Balken. Zweidimensionale Schwingungen.**

Lit.: 1. G.P. Ostermeyer. "Mechanik III". Gross, Hauger, Schnell und Wriggers, „Technische Mechanik 4“

**I. Balkenschwingung**

**Beispiel 1.** Gegeben sei ein links eingespannter Balken. Zu bestimmen sind die Eigenfrequenzen und die Eigenformen der Schwingungen.



*Lösung:* Die allgemeine Lösung lautet

$$W(x) = A^* \cos \kappa x + B \sin \kappa x + C \cosh \kappa x + D \sinh \kappa x.$$

Die Randbedingungen sind:

Verschiebung links verschwindet:

$$W(0) = 0: \quad A^* + C = 0$$

Neigung links verschwindet:

$$W'(0) = 0: \quad B + D = 0$$

Moment rechts verschwindet:

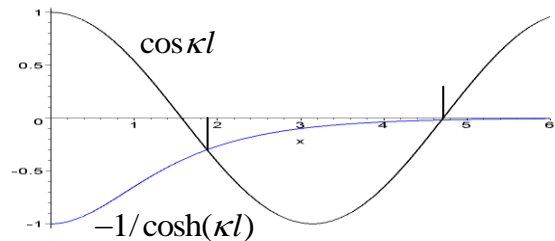
$$W''(l) = 0: \quad -A^* \cos \kappa l - B \sin \kappa l + C \cosh \kappa l + D \sinh \kappa l = 0$$

Kraft rechts verschwindet:

$$W'''(l) = 0 \quad \begin{matrix} A^* \sin \kappa l - B \cos \kappa l \\ + C \sinh \kappa l + D \cosh \kappa l = 0 \end{matrix}$$

Die charakteristische Gleichung (Determinante des Gleichungssystems wird Null):

$$\cosh \kappa l \cos \kappa l + 1 = 0 \quad \text{oder} \quad \cos \kappa l = -\frac{1}{\cosh \kappa l}$$



$$\kappa_1 l = 1.8, \quad \kappa_2 l = 4.7$$

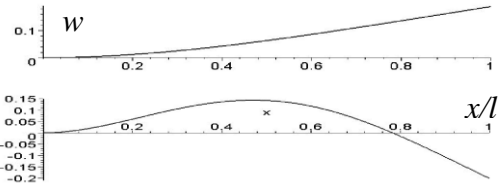
Um die Eigenformen zu bestimmen, verwenden wir drei der vier Gleichungen des homogenen Gleichungssystems

$$C = -A, \quad B = -D = -A \frac{\cos \kappa l + \cosh \kappa l}{\sin \kappa l + \sinh \kappa l}.$$

Die Eigenformen sind dann:

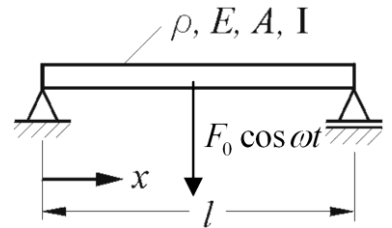
$$W_n(x) = A \left\{ \begin{matrix} \cos \kappa_n x - \cosh \kappa_n x \\ -\frac{\cos \kappa_n l + \cosh \kappa_n l}{\sin \kappa_n l + \sinh \kappa_n l} (\sin \kappa_n x - \sinh \kappa_n x) \end{matrix} \right\}$$

Die ersten zwei Eigenformen sind im Bild gezeigt.



**II. Erzwungene Schwingungen.**

**Beispiel 2.** Zu berechnen ist Amplitude der Schwingungen des Mittelpunktes des gezeigten Balkens.



*Lösung:* Wir suchen die partikuläre Lösung in der Form  $w(x,t) = W(x) \cos \omega t$

Die allgemeine Lösung bis zur Mitte des Balkens sei

$$W_-(x) = A^* \cos \kappa x + B \sin \kappa x + C \cosh \kappa x + D \sinh \kappa x$$

Randbedingungen:

$$\left. \begin{matrix} W_-(0) = 0 & A^* + C = 0 \\ W_-''(0) = 0 & -A^* + C = 0 \end{matrix} \right\} \begin{matrix} A^* = 0 \\ C = 0 \end{matrix}$$

$W_-(l/2) = 0$  (aus Symmetriegründen):

$$\begin{matrix} -A^* \sin \kappa l / 2 + B \cos \kappa l / 2 + C \sinh \kappa l / 2 + D \cosh \kappa l / 2 = 0 \\ -Q_{links}(l/2) - F_0 / 2 \cdot \cos \Omega t = 0; \end{matrix}$$

$$Q(l/2) = EI w'''(x,t) = F(x,t) / 2:$$

$$A^* \sin \kappa l / 2 - B \cos \kappa l / 2 + C \sinh \kappa l / 2 + D \cosh \kappa l / 2 = \frac{F_0}{2 \kappa^3 EI}$$

Die Lösung lautet

$$D = \frac{F_0}{4 \kappa^3 EI \cosh \kappa l / 2}, \quad B = -\frac{F_0}{4 \kappa^3 EI \cos \kappa l / 2}.$$

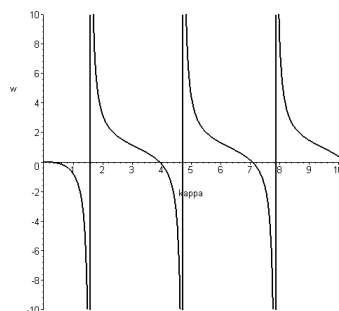
Die Ortsfunktion ist

$$W_-(x) = \frac{F_0}{4 \kappa^3 EI} \left( -\frac{\sin \kappa x}{\cos \kappa l / 2} + \frac{\sinh \kappa x}{\cosh \kappa l / 2} \right).$$

Die Amplitude der Schwingungen bei  $x = l/2$ :

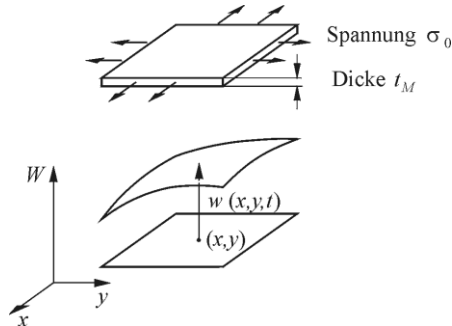
$$W(l/2) = \frac{F_0}{4 \kappa^3 EI} \left( -\frac{\sin \kappa l / 2}{\cos \kappa l / 2} + \frac{\sinh \kappa l / 2}{\cosh \kappa l / 2} \right)$$

Sie wird unendlich wenn der Nenner Null wird.



### III. Bewegungsgleichung für eine Membran.

Genauso wie eine Saite, hat eine *Membran* keine Biegesteifigkeit. Sie wird erst durch eine Vorspannung elastisch. Betrachten wir eine in allen Richtungen gleich gespannte Membran (Spannung  $\sigma_0$ ).



Die Bewegungsgleichung lautet:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad \text{mit } c^2 = \sigma_0 / \rho$$

#### Zweidimensionale Wellengleichung

Die Ableitungen auf der rechten Seite verkürzt man oft zu

$$\Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2},$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad \text{heißt Laplace-Operator.}$$

Die Wellengleichung kann dann auch in der Form  $\ddot{w} = c^2 \Delta w$  geschrieben werden.

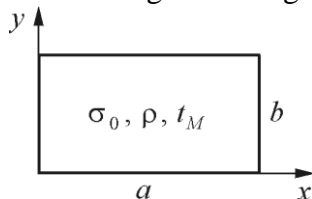
**IV. Bernoulli-Ansatz.** Die zweidimensionale Wellengleichung kann immer mit dem Bernoulli-Ansatz gelöst werden:

$$w(x, y, t) = W(x, y) \cdot \cos \omega t$$

Das ist besonders sinnvoll, wenn nach Eigenfrequenzen gefragt wird. Einsetzen in die Wellengleichung liefert für den Ortsteil des Ansatzes die folgende Gleichung

$$\underbrace{\Delta W + k^2 W = 0}_{\text{Helmholtz-Gleichung}} \quad \text{mit } k = \omega / c$$

**Beispiel 3.** Gegeben ist eine Rechteckmembran mit fest gelagerten Rändern. Zu finden sind die Eigenschwingungsformen und die



Eigenfrequenzen.  
**Lösung:**  
 Bernoulli-Ansatz:  
 $w(x, y, t) = W(x, y) \cdot \cos \omega t$

Die Ortsfunktion  $W(x, y)$  suchen wir wiederum in Form eines Produktes

$$W(x, y) = X(x)Y(y) \quad \begin{cases} X = A \cos \alpha x + B \sin \alpha x \\ Y = C \cos \beta y + D \sin \beta y \end{cases}$$

Einsetzen in die Helmholtz-Gleichung ergibt  $\alpha^2 + \beta^2 = k^2$

Jetzt benutzen wir die Randbedingungen:

$$\begin{aligned} W(0, y) = 0 &\rightarrow X(0) = 0 & A = 0 \\ W(a, y) = 0 &\rightarrow X(a) = 0 & B \sin \alpha a = 0 \\ W(x, 0) = 0 &\rightarrow Y(0) = 0 & C = 0 \\ W(x, b) = 0 &\rightarrow Y(b) = 0 & D \sin \beta b = 0 \end{aligned}$$

Daraus folgt

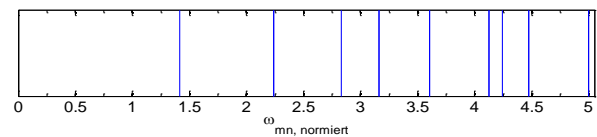
$$\sin \alpha a = 0 \rightarrow \alpha_m = \frac{\pi m}{a} \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

$$\sin \beta b = 0 \rightarrow \beta_n = \frac{\pi n}{b} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$k_{mn} = \sqrt{\alpha_m^2 + \beta_n^2} = \pi \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}$$

Die Eigenfrequenzen sind somit

$$\omega_{mn} = k_{mn} c = \pi c \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}$$

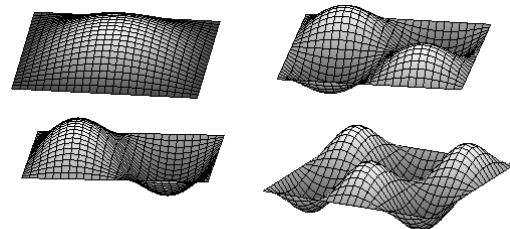


**Bild.** Verteilung von Eigenfrequenzen einer Membran bei  $a = b$  normiert auf  $\pi c / a$ .

Die Eigenfunktionen sind:

$$W_{mn} = \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{b}$$

Die ersten vier Eigenschwingungsformen:



### V. Experiment: Eigenschwingungsformen einer Platte

