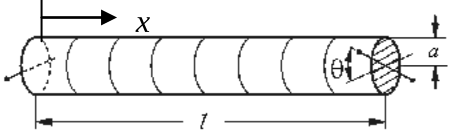
Kontinuumsmechanik / Prof. Popov / Vorlesung 4.
Torsionsschwingungen. Biegeschwingungen.
Lit.: 1. G.P. Ostermeyer. "Mechanik III" Gross, Hauger, Schnell und Wriggers, „Technische Mechanik 4"

I. Torsionsschwingungen.

Gegeben sei ein elastischer Stab mit rundem Querschnitt. Untersucht werden seine Torsionsbewegungen. Jeder Querschnitt wird durch den Winkel $\theta(x)$ charakterisiert, um welchen er sich bezüglich des "unverdrehten" Anfangszustandes gedreht hat.



Wir schneiden aus einem verdrehten Stab ein infinitesimal kleines Element zwischen x und x+dx heraus. Der linke Rand ist gedreht um den Winkel $\theta(x)$, der rechte um $\theta(x+\mathrm{d}x)=\theta+\mathrm{d}\theta$. Das Torsionsmoment im Querschnitt ist gleich

$M = GI_p \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x} = GI_p\theta'$. I_p ist das polare geometrische Trägheitsmoment des Querschnitts. Da es sich um Rotationsbewegung (um die Stabachse) handelt, benutzen wir den Drehimpulssatz:

$$\Theta_p \cdot \ddot{\theta} = -M\left(x\right) + M\left(x+\mathrm{d}x\right) = \frac{\partial M}{\partial x}\cdot \mathrm{d}x = M'\mathrm{d}x$$

Unter Berücksichtigung der Beziehung $\Theta_p = I_p\rho\mathrm{d}x$ ($\rho\mathrm{d}x$ ist die Flächenmassendichte), nimmt das 2. N.G. für das Element die Form $\rho\mathrm{d}xI_p\cdot\ddot{\theta} = GI_p\theta''\mathrm{d}x$ oder

$$\boxed{\ddot{\theta} = c^2\theta''} \text{ mit } \boxed{c^2 = G/\rho}.$$

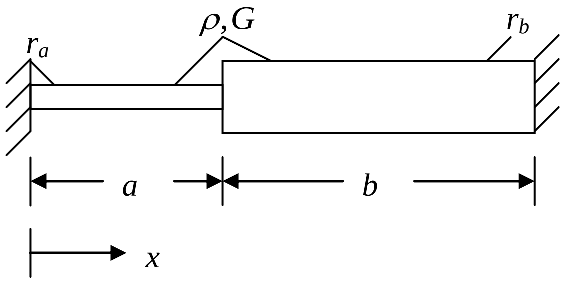
Für Stahl gilt $c \approx 3200\,\mathrm{m/s}$.

Die Form der Gleichung und die Wellenausbreitungsgeschwindigkeit hängen nicht vom Radius des Stabes ab!

II. Randbedingungen:

1. Am fest gelagerten Ende: $\theta = 0$.
2. Am freien Ende: $M = GI\theta' = 0 \Rightarrow \theta' = 0$.
3. Wenn am Ende ein Kraftmoment $M(t)$ angreift: $GI\theta' = M(t)$.

III. Übergangsbedingungen (am Beispiel von Torsionsschwingungen).
Zu bestimmen ist die kleinste Eigenfrequenz von Torsionsschwingungen eines kreiszylindrischen Stabes wie im Bild. Der Stab ist links und rechts fest gelagert.



Die Wellengleichung ist die gleiche in beiden Teilen. Die allgemeine Lösung im linken Teil (a): $\theta(x) = A_1\cos kx + B_1\sin kx$, $x\in(0,a)$

Die allgemeine Lösung im rechten Teil (b):

$\theta(x) = A_2\cos kx + B_2\sin kx$, $x\in(a,a+b)$.

Randbedingungen:

1. $\theta(0) = A_1 = 0$

2. $\theta(a+b) = A_2\cos k(a+b) + B_2\sin k(a+b) = 0$

Übergangsbedingungen:

3. $\theta(a)_{\text{links}} = \theta(a)_{\text{rechts}}$:

$$A_1\cos ka + B_1\sin ka = A_2\cos ka + B_2\sin ka$$

4. $M(a)_{\text{links}} = M(a)_{\text{rechts}}$:

$$GI_a\left(-A_1k\sin ka + B_1k\cos ka\right) =$$
$$GI_b\left(-A_2k\sin ka + B_2k\cos ka\right)$$

Charakteristische Determinante:

$$\begin{vmatrix} 0 & \cos k(a+b) & \sin k(a+b) \\ -\sin ka & \cos ka & \sin ka \\ -I_a\cos ka & -I_b\sin ka & I_b\cos ka \end{vmatrix} = 0$$
$$\begin{array}{ccc} 0 & \cos k(a+b) & \sin k(a+b) \\ -\sin ka & \cos ka & \sin ka \end{array}$$

$$I_b\sin^2 ka\cdot\sin k(a+b) - I_a\sin ka\cdot\cos ka\cdot\cos k(a+b)$$
$$+I_a\cos^2 ka\cdot\sin k(a+b) + I_b\sin ka\cdot\cos ka\cdot\cos k(a+b) =$$
$$=\left(I_b - I_a\right)\sin ka\cdot\cos ka\cdot\cos k(a+b) +$$
$$\left(I_a\cos^2 ka + I_b\sin^2 ka\right)\cdot\sin k(a+b) = 0$$

Setzen wir folgende Werte ein: $a=b$, $r_a = r_b/2$. Mit $I_a = I_b/16$ folgt aus der letzten Gleichung:

$$\left(1-1/16\right)\sin ka\cdot\cos ka\cdot\cos 2ka +$$
$$\left(\frac{1}{16}\cos^2 ka + \sin^2 ka\right)\underbrace{\sin 2ka}_{=2\sin ka\cdot\cos ka} = 0$$

Die Bedingung ist erfüllt, wenn *eine* der folgenden Gleichungen gilt:

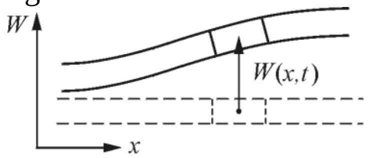
1. $\sin ka = 0$, 2. $\cos ka = 0$,

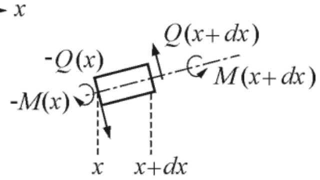
3. $(15/16)\underbrace{\cos 2ka}_{\cos^2 ka - \sin^2 ka} + 2\left(\frac{1}{16}\cos^2 ka + \sin^2 ka\right) = 0$

Die dritte Gleichung ist nie erfüllt, also muss eine der ersten beiden erfüllt sein.

Die kleinste Zahl k folgt aus der zweiten Gleichung: $k = \frac{\pi}{2a}$. Die entsprechende Frequenz $\omega = kc = \frac{\pi c}{2a}$ ist die kleinste Eigenfrequenz.

IV. Biegeschwingungen eines elastischen Balkens.
Wir betrachten den inneren Bereich eines Balkens. Die Befestigungsart ist zunächst ohne Bedeutung, da sie erst in den Randbedingungen auftritt.





Annahmen: Querauslenkungen und Neigungen sind sehr klein, Krümmungsradius ist sehr viel größer als die Dicke des Balkens.

Wir schneiden ein infinitesimal kleines Element des Balkens frei. Unter den oben gemachten Annahmen gilt: (1) Die Translationsbewegung erfolgt fast in der vertikalen Richtung, (2) die Kräfte in der vertikalen Richtung fallen fast mit den Querkräften zusammen, (3) die Neigungswinkel sind sehr klein und die Rotationsbewegung kann vernachlässigt werden.
Das 2. Newtonsche Gesetz für die vertikale Bewegung des Elementes lautet dann

$$\underbrace{\rho A dx}_{dm} \cdot \ddot{w} = -Q(x) + Q(x+dx) = \frac{\partial Q}{\partial x} dx \qquad (1)$$

Rotation gibt es nicht, deshalb gelten für die Momente dieselben Zusammenhänge wie in der Statik: $Q = M'$ und $M = -EIw''$, wobei I das geometrische Trägheitsmoment des Querschnitts ist. Einsetzen in (1) liefert für längshomogene Balken

$$\ddot{w} = -\frac{EI}{\rho A} w^{IV} \quad \text{oder} \quad \boxed{\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{EI}{\rho A}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0}$$

V. Bernoullische Lösung für Biegeschwingungen eines Balkens.
Zur Lösung dieser Gleichung ist die d'Alembertsche Methode nicht anwendbar.
Der Bernoulli-Ansatz ist aber auf alle linearen Gleichungen anwendbar:
$w(x,t) = W(x)\cos\omega t$

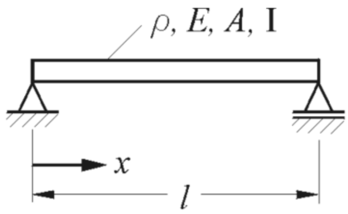
$$\frac{d^4 W}{dx^4} \cdot \frac{EI}{\rho A} = \omega^2 W \quad \Rightarrow \quad \frac{d^4 W}{dx^4} - \kappa^4 W = 0 \quad (2)$$

mit $\kappa^4 = \omega^2 \rho A / EI$.

Jede lineare gewöhnliche Differentialgleichung kann mit einem Exponentialansatz gelöst werden: $W = W_0 e^{\lambda x}$.

Nach Einsatz in (2): $\lambda^4 = \kappa^4$.
Das bedeutet
$\lambda^2 = \pm\kappa^2 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \{+\kappa, -\kappa, +i\kappa, -i\kappa\}$
Allgemeine Lösung:
$W(x) = \tilde{A}e^{i\kappa x} + \tilde{B}e^{-i\kappa x} + \tilde{C}e^{\kappa x} + \tilde{D}e^{-\kappa x}$ oder
$W(x) = A^*\cos\kappa x + B\sin\kappa x + C\cosh\kappa x + D\sinh\kappa x$

Beispiel für Biegeschwingungen. Gegeben sei ein beidseitig drehbar gelagerter Balken. Zu bestimmen sind die Eigenfrequenzen.



Die allgemeine Lösung ist oben angegeben. Randbedingungen: Verschiebung w und Moment $M = -EIw''$ an beiden Rändern sollen verschwinden

$W(0) = 0: \quad A^* + C = 0$

$W(l) = 0: \quad A^*\cos\kappa l + B\sin\kappa l + C\cosh\kappa l + D\sinh\kappa l = 0$

$W''(0) = 0: \quad -A^* + C = 0$

$W''(l) = 0: \quad -A^*\cos\kappa l - B\sin\kappa l + C\cosh\kappa l + D\sinh\kappa l = 0$

Daraus: $A^* = C = D = 0$. Die charakteristische Gleichung reduziert sich auf

$\sin\kappa l = 0 \quad \Rightarrow \quad \kappa_n l = \pi n \quad \Rightarrow \quad \kappa_n = \pi n / l$

$$\boxed{\omega_n = \kappa_n^2\sqrt{\frac{EI}{\rho A}} = \frac{n^2\pi^2}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho A}}}$$