

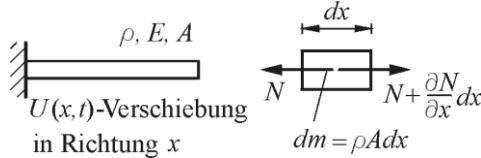
**Longitudinalschwingungen von Stäben. Erzwungene Schwingungen**

Literatur: 1. G.P. Ostermeyer. "Mechanik III" 21.1., 21.4.

2. Gross, Hauger, Schnell und Wriggers, „Technische Mechanik 4“, Kapitel 4.2.1, 4.2.2

**I. Longitudinalschwingungen von Stäben.**

$u(x,t)$  sei die Verschiebung des Punktes  $x$  des Stabes in Richtung  $x$ . Wir betrachten ein infinitesimales kleines Element der Länge  $dx$ .



Das 2. NG für dieses Element lautet

$$\rho A dx \cdot \ddot{u} = -N + \left( N + \frac{\partial N}{\partial x} dx \right) = \frac{\partial N}{\partial x} dx \quad (1)$$

Aus dem Elastizitätsgesetz folgt

$$N = \sigma A = E \varepsilon A = EA \frac{\Delta l}{l} = EA \frac{du}{dx} = EA u' \quad (2)$$

Einsetzen von (2) in (1) ergibt die

Wellengleichung  $\rho \ddot{u} = E u''$

oder  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  mit  $c^2 = E / \rho$ .

$c$  ist die Wellenfortpflanzungsgeschwindigkeit. Z.B. für Stahl:

$$E = 210 \text{ GPa} = 2,1 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$$

$$\rho = 7,8 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3, \quad c = 5190 \text{ m/s}.$$

**Beispiel 1.** Zu bestimmen ist die Stoßzeit einer 1 Meter langen stählernen Stange mit einer festen Wand.

*Lösung:* Die Punkte am anderen Ende des Stabes "erfahren" vom Zusammenstoß erst nach der Zeit  $t_1 = l/c$ . Die Punkte im Stoßpunkt "erfahren" von der Anwesenheit des freien Endes nach  $t_2 = l/c$ . Der Stoß dauert  $t = t_1 + t_2 = 2l/c = 3,8 \cdot 10^{-4} \text{ s} = 0,38 \text{ ms}$ .

Aufgabe zum Überlegen: Was passiert beim Zusammenstoß (a) zweier gleicher Stangen, (b) zweier Stangen mit verschiedenen Längen?

**II. Randbedingungen.**

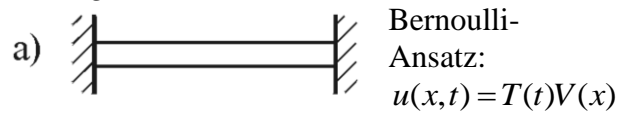
**II.1. Die einfachsten Randbedingungen**

- Bei einem fest gelagerten Rand  $u = 0$  (keine Verschiebung)
- Bei einem freien Rand  $u' = 0$  (keine Normalkraft)

**Beispiel 2.** Zu bestimmen sind die Eigenfrequenzen und Eigenformen für einen

- (a) beiderseitig festgelagerten
- (b) beiderseitig freien Stab

*Lösung:*



Für  $V(x)$  erhalten wir die Gleichung

$$V'' + \frac{\omega^2}{c^2} V = 0 \text{ oder } V'' + k^2 V = 0.$$

Die Zahl  $k = \omega/c$  heißt *Wellenzahl*.

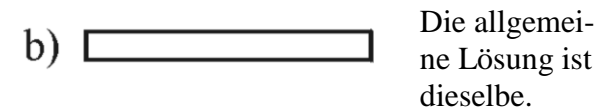
Die allgemeine Lösung der obigen Gleichung ist  $V(x) = A \cdot \cos kx + B \sin kx$ .

Aus den Randbedingungen folgt

$$u(0,t) = 0 \rightarrow A^* = 0$$

$$u(l,t) = 0 \rightarrow B \sin kl = 0 \rightarrow k_n l = \pi n$$

$$\omega_n = k_n c = \pi n c / l$$



Aus den Randbedingungen folgt jedoch

$$u'(0) = 0 \Rightarrow B = 0$$

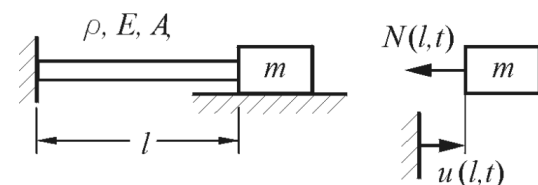
$$u'(l) = 0 \Rightarrow \sin kl = 0$$

$$kl = \pi n, \quad \omega_n = \pi n c / l.$$

Die Eigenfrequenzen sind dieselben wie im Fall a), aber die Eigenformen sind verschieden!

**II.2. Kompliziertere Randbedingungen.**

**A. Stab mit einer am Ende angehefteten Masse.**



Das 2.NG für die Masse

$$m \ddot{u}(l,t) = -N(l,t) = -EA u'(l,t)$$

ist die neue Randbedingung am rechten Rand!

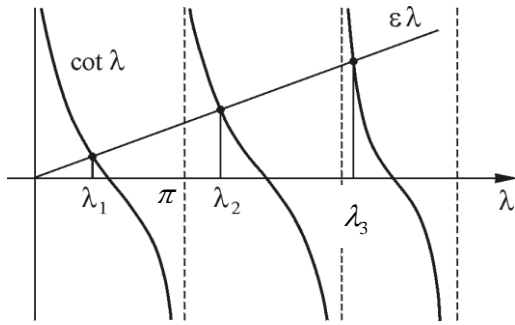
Aus der Randbedingung am linken Rand folgt  $A^* = 0$ . Aus der Randbedingung am rechten Rand:  $-m \omega^2 u(l) = -EA u'(l)$  oder

$$m \omega^2 B \sin kl = EABk \cos kl$$

$$\cot kl = \frac{mc^2}{EA} \frac{kl}{l} = \frac{mc^2}{EA} \lambda \text{ mit } \lambda = kl$$

$$\cot \lambda = \frac{mc^2}{EA} \lambda = \frac{mE}{E \rho A l} \lambda = \varepsilon \lambda$$

$$\varepsilon = m/M, \quad M - \text{Stabmasse.}$$

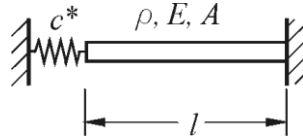


Es gibt unendlich viele Wurzeln  $\lambda_n = k_n l$ .

Daraus  $k_n = \lambda_n / l$  und  $\omega_n = k_n c = \lambda_n c / l$

Grenzfall  $m = 0$ ;  $\cos(kl) = 0$ ;  $k_n l = \frac{2n-1}{2} \pi$

### B. Gefedert gelagerter Stab.



Bernoulli-Ansatz:

$$u(x,t) = (a \cos(kx) + b \sin(kx)) \cdot T(t)$$

Das Hooke'sche Gesetz für die Feder:

$$N(0,t) = c^* u(0,t) \text{ oder}$$

$E A u'(0,t) = c^* u(0,t)$  ist die Randbedingung

am linken Rand. Einsetzen von

$$u'(0,t) = (-ak \sin(k \cdot 0) + bk \cos(k \cdot 0)) \cdot T(t) = bk T(t)$$

und

$$u(0,t) = (a \cos(k \cdot 0) + b \sin(k \cdot 0)) \cdot T(t) = a T(t)$$

in die Randbedingung am linken Rand ergibt

$$E A k b = c^* a \quad (3)$$

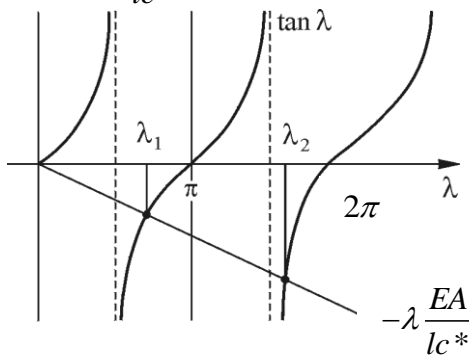
Am rechten Rand  $u(l,t) = 0$ :

$$a \cos(kl) + b \sin(kl) = 0 \quad (4)$$

Eine nicht triviale Lösung existiert dann, wenn die Koeffizientendeterminante des Systems (3,4) gleich Null ist:

$$c^* \sin(kl) + E A k \cos(kl) = 0 \text{ oder}$$

$$\tan \lambda + \lambda \frac{E A}{l c^*} = 0$$



Dann sind die  $\lambda_i$  zu bestimmen  $k_i = \lambda_i / l$  und aus diesen die Eigenfrequenzen:  $\omega_i = k_i c$ .

Aufgabe zum Überlegen: was passiert in den Grenzfällen  $c \rightarrow 0$  und  $c \rightarrow \infty$ ?

### III. Erzwungene Longitudinalschwingungen.

Am rechten Ende eines links fest gelagerten Stabes wirkt eine periodische Kraft



Zu bestimmen ist Bewegung des Stabes.

Lösung: Die Randbedingungen lauten:

$$u(0,t) = 0 \text{ und}$$

$$N(l,t) = E A u'(l,t) = F_0 \cos \Omega t$$

Die Partikularlösung der Wellengleichung suchen wir in der Form

$$u_p(x,t) = U_p(x) \cdot \cos \Omega t$$

Einsetzen in die Wellengleichung liefert

$$U_p'' + (\Omega^2 / c^2) U_p = 0.$$

Die allgemeine Lösung für die Ortsfunktion:

$$U_p(x) = B_1 \cos(\Omega / c)x + B_2 \sin(\Omega / c)x,$$

$$u_p(x,t) = (B_1 \cos(\Omega / c)x + B_2 \sin(\Omega / c)x) \cdot \cos \Omega t$$

Aus den Randbedingungen folgt

$$U_p(0,t) = 0 \Rightarrow B_1 = 0$$

$$E A u'_p(l,t) = F_0 \cos \Omega t$$

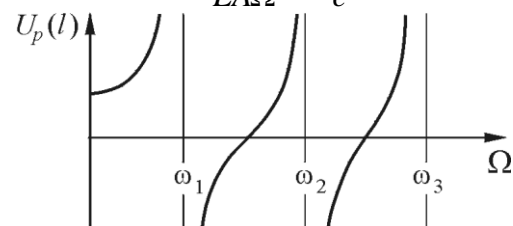
$$E A B_2 \frac{\Omega}{c} \cdot \cos \frac{\Omega}{c} l = F_0 \Rightarrow B_2 = \frac{F_0}{E A \frac{\Omega}{c} \cos \frac{\Omega}{c} l}.$$

Die Partikularlösung ist also gleich

$$u_p(x,t) = U_p(x) \cos \Omega t = \frac{F_0 l}{E A \frac{\Omega}{c} l \cos \frac{\Omega}{c} l} \sin \frac{\Omega}{c} x \cos \Omega t$$

Die Amplitude der Schwingung bei  $x = l$  ist

$$\text{gleich } U_p(l) = \frac{F_0 c}{E A \Omega} \tan \frac{\Omega}{c} l \text{ (s. Bild unten)}$$



Die Amplitude wird *unendlich* bei allen Frequenzen, für welche  $\cos \Omega l / c = 0$ . Das sind genau die Eigenfrequenzen eines einseitig fest gelagerten Stabes!

Wird die Erregerfrequenz gleich einer der Eigenfrequenzen des Systems, so wächst die Schwingungsamplitude unendlich (Resonanz).