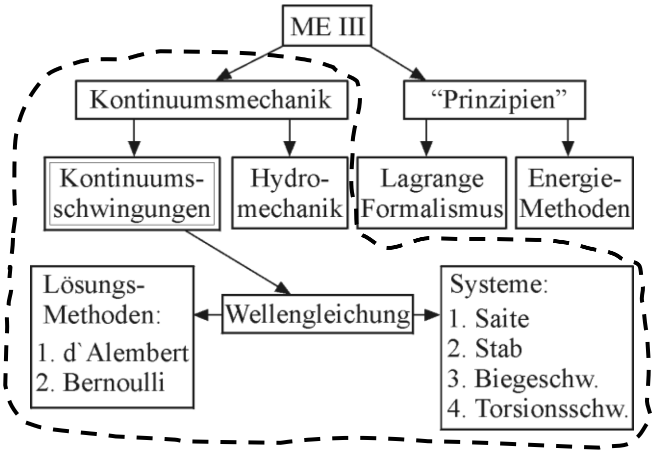
Kontinuumsmechanik / Prof. Popov / Vorlesung 1.

Schwingungen von Kontinua: Die Saite, die Wellengleichung, d´Alembertsche Lösung

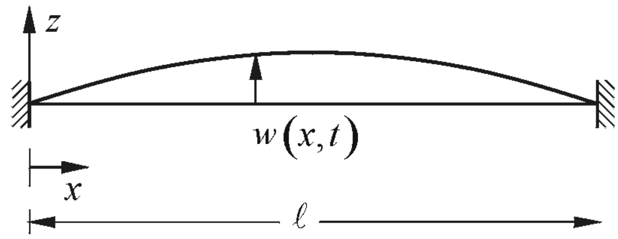
Literatur: 1. G.P. Ostermeyer. "Mechanik III" 2. Hauger, Schnell und Groß. „Technische Mechanik 4“

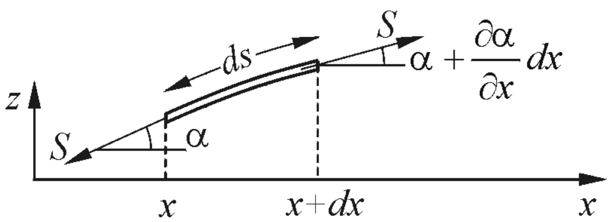


I. Herleitung der Bewegungsdifferentialgleichung für eine gespannte Saite

Gegeben sei ein vorgespannter Faden, der keine Biegesteifigkeit besitzt. Massenbelegung (Masse pro Längeneinheit) sei $\mu = \rho A$. Zu bestimmen ist die Bewegungsgleichung für die Saite.

S - Zugkraft





Wir schneiden ein infinitesimales Saitenelement mit der Länge ds frei. Es gilt:

$\alpha \approx \sin\alpha \approx \tan\alpha \approx w'$:

$\alpha + d\alpha \approx \sin(\alpha + d\alpha) \approx w' + dw' = w' + w''dx$

Die auf das Element wirkende Kraft ist

$$dF_z = S\cdot\sin(\alpha + d\alpha) - S\sin(\alpha) =$$
$$= S(\alpha + d\alpha - \alpha) = Sd\alpha = Sw''dx$$

Das 2. Newtonsche Gesetz für das Element:

$dm\cdot\ddot{w} = dF_z \Rightarrow \mu \cancel{dx}\,\ddot{w} = Sw''\cancel{dx}$:

$\mu\ddot{w} = Sw''$

oder

$$\boxed{\ddot{w} = c^2 w'' \quad \textit{Die Wellengleichung:} \quad \text{lineare, homogene, partielle DGL}} \qquad (1)$$

$$\boxed{c^2 = \frac{S}{\mu} \quad \text{Wellenfortpflanzungsgeschwindigkeit}}$$

Zur Lösung der Bewegungsdifferentialgleichung werden noch

die ***Anfangsbedingungen:***
$w(x,0) = w_0(x), \quad \dot{w}(x,0) = v_0(x)$
und die ***Randbedingungen***: z.B.
$w(0,t) = 0; \qquad w(l,t) = 0$

benötigt.

II. d´Alembertsche Lösung der Wellengleichung.

Eine *beliebige* Funktion der Form

$w = f_1(x - ct) = f_1(\xi), \quad \xi = x - ct$

genügt der Wellengleichung. Beweis:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial t} = -c\frac{\partial w}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \quad = \ddot{w} \qquad (2)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial \xi}:$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \quad = w'' \qquad (3)$$

Mit (2) und (3) in (1) folgt:

$$c^2\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} = c^2\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \quad \rightarrow \text{gelungen!}$$

Eine *beliebige* Funktion der Form

$w = f_2(x + ct) = f_2(\zeta), \quad \zeta = x + ct$

ist auch eine Lösung der Wellengleichung.

Allgemeine Lösung:
$w(x,t) = f_1(x - ct) + f_2(x + ct)$.

$f_1(x - ct)$ beschreibt eine Welle,
die sich mit konstanter Geschwindigkeit c ohne Änderung ihres Profils in positive x-Richtung fortpflanzt.

Beweis, dass dies eine allgemeine Lösung ist:
$\xi = x - ct; \quad \zeta = x + ct$.

$$x = \frac{1}{2}(\xi + \zeta); \quad ct = \frac{1}{2}(\zeta - \xi).$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial \zeta}\cdot\frac{\partial \zeta}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial \xi} + \frac{\partial w}{\partial \zeta}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \zeta} + \frac{\partial^2 w}{\partial \zeta^2}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \left(\frac{\partial w}{\partial \zeta} - \frac{\partial w}{\partial \xi}\right)\cdot c$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \zeta^2} - 2\frac{\partial^2 w}{\partial \zeta \partial \xi} + \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}\right)$$

Die Wellengleichung nimmt die Form $\frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \zeta} = 0$ an.

Nach der ersten Integration: $\frac{\partial w}{\partial \zeta} = g(\zeta)$.

Nach der zweiten Integration: $w = f_1(\xi) + f_2(\zeta) = f_1(x - ct) + f_2(x + ct)$.

Bestimmung der Funktionen f_1 und f_2 aus Anfangsbedingungen

$$f_1(x) + f_2(x) = w_0(x)$$

$$-cf_1'(x) + cf_2'(x) = v_0(x)$$

$$-f_1(x) + f_2(x) = \frac{1}{c}\int_{x_0}^{x} v_0(\bar{x})d\bar{x} - f_1(x_0) + f_2(x_0)$$

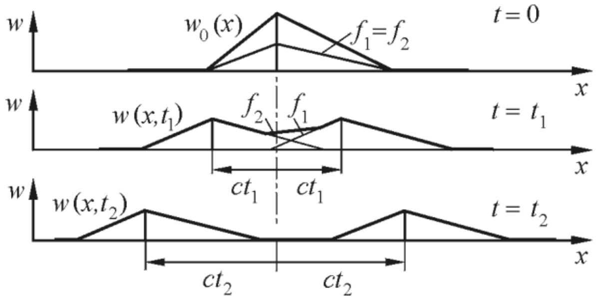
$$f_{1,2}(x) = \frac{1}{2}\left[w_0(x) \pm \frac{1}{c}\int_{x_0}^{x} v_0(\bar{x})\,d\bar{x}\right]$$

$$w(x,t) = \frac{1}{2}\left[w_0(x - ct) - \frac{1}{c}\int_{x_0}^{x-ct} v_0(\bar{x})\,d\bar{x}\right] + \frac{1}{2}\left[w_0(x + ct) + \frac{1}{c}\int_{x_0}^{x+ct} v_0(\bar{x})\,d\bar{x}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[w_0(x - ct) + w_0(x + ct) + \frac{1}{c}\int_{x-ct}^{x+ct} v_0(\bar{x})\,d\bar{x}\right]$$

<u>Beispiel:</u> $v_0(x) = 0$

$$w(x,t) = \frac{1}{2}\left[w_0(x - ct) + w_0(x + ct)\right]$$



Das ist nur eine richtige Lösung solange die Wellen auf keine Ränder treffen.

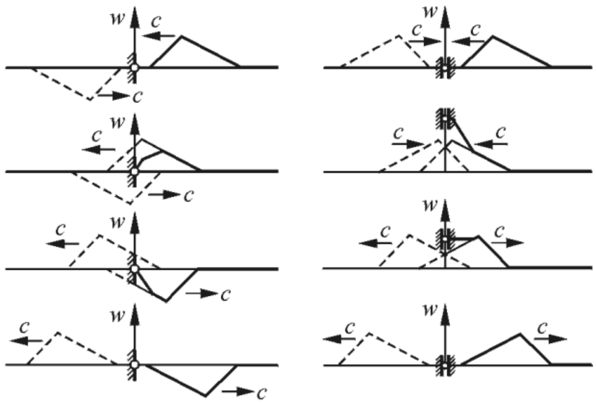
Berücksichtigung der Randbedingungen

Beispiel 1. Fester Rand $w(0) = 0$.

Die Aufgabe besteht in der Bestimmung einer solchen Funktion, die bei $x \in (0, \infty)$ (a) der Wellengleichung, (b) der Anfangsbedingung und (c) der Randbedingung genügt. Zu diesem Zweck betrachten wir *zunächst eine unendliche* Saite mit zwei symmetrischen Wellen mit *verschiedenem* Vorzeichen, die auf einander laufen. Diese Welle genügt *auf dem Intervall* $x \in (0, \infty)$ den Bedingungen (a),(b) und (c) und ist somit die gesuchte Lösung (Bild (a) unten).

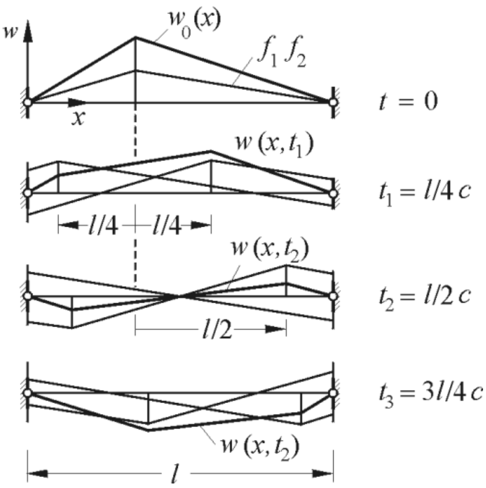
Beispiel 2. Freier Rand $w'(0) = 0$.

Wir betrachten wieder *zunächst eine unendliche* Saite mit zwei symmetrischen Wellen mit *gleichen* Vorzeichen, die auf einander laufen. Diese Welle genügt *auf dem Intervall* $x \in (0, \infty)$ den Bedingungen (a),(b) und (c) und ist somit die gesuchte Lösung (Bild (b) unten).



a b

Beispiel 3. Fester Rand beiderseitig



Die Saite schwingt mit einer Schwingungsdauer $T = \frac{2l}{c}$.