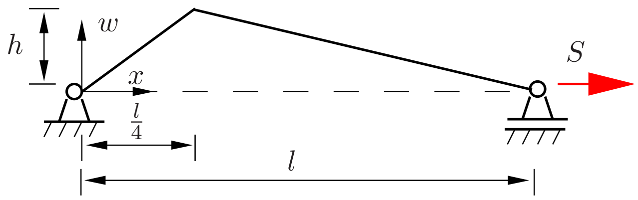


8. Eine beidseitig eingespannte Saite der Länge l (Dichte ρ, Querschnittsfläche A) ist um die Kraft S vorgespannt. Nach Einleitung der folgenden Anfangsbedingungen führt sie freie, ungedämpfte, rein transversale Schwingungen aus:

$$\dot{w}(x, t = 0) = 0$$

$$w(x, t = 0) = \begin{cases} 4\frac{h}{l}x & \text{für } 0 \leq x < \frac{l}{4} \\ \frac{4}{3}\left(1 - \frac{x}{l}\right)h & \text{für } \frac{l}{4} \leq x \leq l \end{cases}$$

Geg.: ρ, A, S, l, h

(a) Bestimmen Sie die d'Alembertsche Lösung der Wellengleichung, und zeichnen Sie die Auslenkungen der Saite zu den Zeitpunkten: $t_0 = 0$, $t_1 = \frac{1}{8}T$, $t_2 = \frac{1}{4}T$, $t_3 = \frac{3}{8}T$, ... über eine volle Periode T.

(b) Lösen Sie die Wellengleichung mit Hilfe des Produktansatzes von Bernoulli. Passen Sie die Lösung an die Rand- und Anfangsbedingungen an.

(c) Zeichnen Sie die ersten vier Eigenschwingungsformen und die Auslenkung der Saite aus der gewichteten Überlagerung dieser vier Eigenformen für den Zeitpunkt $t = 0$.

(d) Zeigen Sie, dass die Lösung nach Bernoulli die Fourierdarstellung der d'Alembertschen Lösung ist.

Lösungen der Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \ddot{w} = c^2 w'' = c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

$w = w(x,t)$ - Auslenkung der Saite

$c = \sqrt{\frac{S}{\mu}}$ - Wellenausbreitungsgeschwindigkeit $[m/s]$

S - Vorspannkraft $[kg\,m/s^2]$

μ - Massenbelag $[kg/m]$

D'Alembertsche Lösung

$$w(x,t) = \underbrace{f_1(x+ct)}_{\text{Welle nach links}} + \underbrace{f_2(x-ct)}_{\text{Welle nach rechts}}$$

- Formulierung als Wellen
- Form der Welle bleibt erhalten
- Form von f_1 und f_2 folgt aus Anfangsbed.
- Einhalten der Randbedingungen durch Überlagerung von Wellen (ein- und auslaufende)

Bernoullische Lösung

- Separation der partiellen DGL mit Hilfe des Ansatzes $w(x,t) = X(x) \cdot T(t)$

- $\Rightarrow$ zwei gewöhnliche DGLn

$$\ddot{T}(t) + \omega^2 T(t) = 0$$

$$X''(x) + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 X(x) = 0$$

- Anpassen der allg. Lösungen an Rand- & Anfangsbed.

Aufgabe 8

a) D'Alembertsche Lösung

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \qquad w(x,t) = f_1(x+ct) + f_2(x-ct)$$

1. AB

$$\dot{w}(x, t=0) = 0$$

$$\dot{w}(x,t) = c\, f_1^{\flat}(x+ct) - c\, f_2^{\sharp}(x-ct)$$

$$(.)^{\flat} = \frac{\partial(.)}{\partial(x+ct)} \quad , \quad (.)^{\sharp} = \frac{\partial(.)}{\partial(x-ct)}$$

$$\dot{w}(x, t=0) = c\, f_1^{\flat}(x) - c\, f_2^{\sharp}(x) = 0$$

$$\Rightarrow f_1^{\flat}(x) = f_2^{\sharp}(x)$$

dann gilt auch

$$f_1'(x) = f_2'(x) \qquad (.)' = \frac{\partial(.)}{\partial x}$$

$$\Rightarrow f_1(x) - f_2(x) = A \quad (\text{const.}) \quad (1)$$

2. AB

$$w(x,t=0) = \begin{cases} 4\frac{h}{\ell}x & 0 \leq x \leq \ell/4 \\ \frac{4}{3}\frac{h}{\ell}(\ell - x) & \ell/4 \leq x \leq \ell \end{cases} = w_A(x)$$

$$w(x,t=0) = f_1(x) + f_2(x) = w_A(x) \quad (2)$$

(1) in (2) :

$$A + f_2(x) + f_2(x) = w_A(x)$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\Rightarrow f_2(x) = \frac{1}{2}w_A(x) - \frac{1}{2}A \\ &\Rightarrow f_1(x) = \frac{1}{2}w_A(x) + \frac{1}{2}A \end{aligned}}$$

$$w(x,t) = f_1(x+ct) + f_2(x-ct)$$

$$= \frac{1}{2}w_A(x+ct) + \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}w_A(x-ct) - \frac{1}{2}A$$

$$= \frac{1}{2}w_A(x+ct) + \frac{1}{2}w_A(x-ct)$$

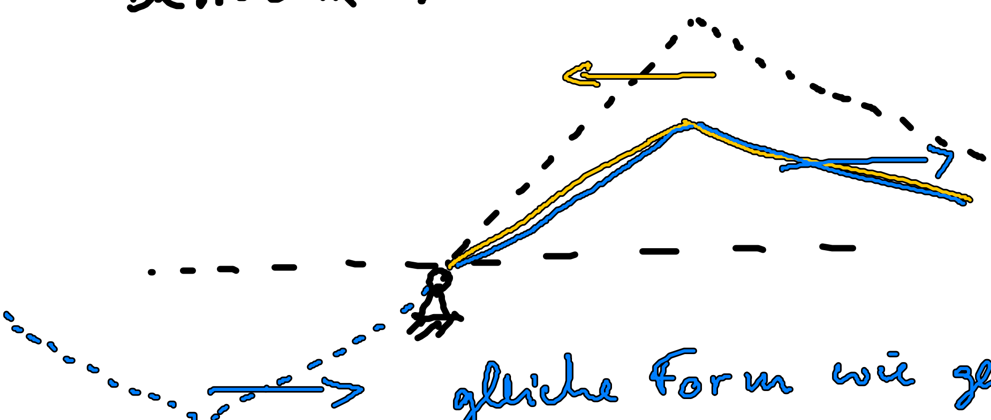
$$= \left\{ \begin{aligned} &\frac{2h}{\ell}(x+ct) && 0 \leq x+ct \leq \ell/4 \\ &\frac{2}{3}\frac{h}{\ell}(\ell-(x+ct)) && \ell/4 \leq x+ct \leq \ell \end{aligned} \right\}$$

$$+\begin{cases} \frac{2h}{\ell}(x-ct) & 0 \le x-ct \le \ell/4 \\ \frac{2}{3}\frac{h}{\ell}(\ell-(x-ct)) & \ell/4 < x-ct \le \ell \end{cases}$$

Dies ist die Lösung, solange die Ränder nicht erreicht werden.

Randbedingungen: $w(0,t)=0$, $w(\ell,t)=0$

Betrachte linkes Ende:



gleiche Form wie gelb, aber negativ

→ Periodische Fortsetzung der Wellen

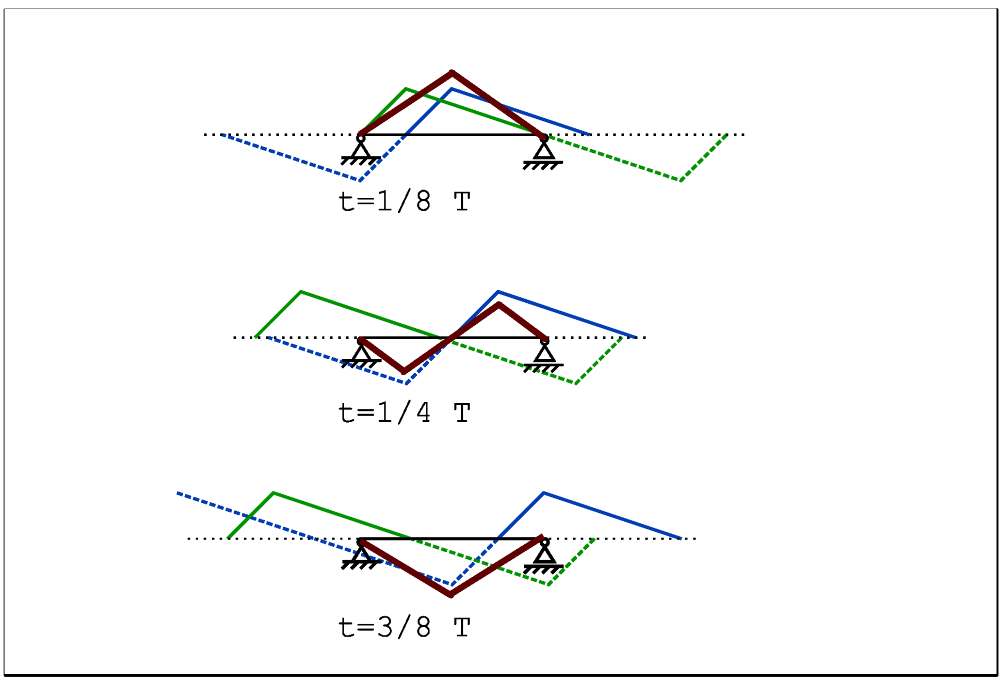
1) Erweiterung des Definitionsbereichs auf $[-\ell/4, \frac{7}{4}\ell]$

2) Periodizität erzeugen: Alles was für x gilt, gilt auch für $x + n2\ell \quad n \in \mathbb{Z}$

⇒ Gesamtlösung:

$$w(x,t) = \begin{cases} \frac{2h}{l}(x+ct) & -\frac{l}{4} \le x+2ln+ct \le l/4 \\ \frac{2}{3}\frac{h}{l}(l-(x+ct)) & l/4 \le x+2ln+ct \le 7/4\, l \end{cases}$$

$$+ \begin{cases} \frac{2h}{l}(x-ct) & -\frac{l}{4} \le x+2ln-ct \le l/4 \\ \frac{2}{3}\frac{h}{l}(l-(x-ct)) & l/4 \le x+2ln-ct \le 7/4\, l \end{cases}$$



b) $w(x,t) = X(x) \cdot T(t)$

$$T(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t$$

$$X(x) = C\cos\frac{\omega}{c}x + D\sin\frac{\omega}{c}x$$

ω - Eigenkreisfrequenz

Randbedingungen:

$w(0,t) = 0$ (1) $\Rightarrow X(0) = 0$

$w(l,t) = 0$ (2) $\Rightarrow X(l) = 0$

(1) $X(0) = C\cos(0) + D\cancel{\sin(0)}^{0} = 0$

$$\Rightarrow C = 0$$

(2) $X(l) = D\sin\left(\frac{\omega}{c}l\right) = 0$

$$\Rightarrow \sin\left(\frac{\omega}{c}l\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\omega}{c}l = n\pi \qquad n = 1, 2, \dots$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega_n = \frac{n\pi c}{l}}$$

$\Rightarrow$ Gesamtlösung

$$w(x,t) = X(x) \cdot T(t)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin\left(\frac{\omega_n}{c}x\right)\left(A_n \cos\omega_n t + B_n \sin\omega_n t\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\omega_n}{c}x\right)\left(\bar{A}_n \cos\omega_n t + \bar{B}_n \sin\omega_n t\right)$$

Anfangsbedingungen:

(1) $\dot{w}(x,t=0) = 0$

$$\dot{w}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n \sin\left(\frac{\omega_n}{c}x\right)\left(-\bar{A}_n \sin\omega_n t + \bar{B}_n \cos\omega_n t\right)$$

$$\dot{w}(x,t=0) = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n \sin\left(\frac{\omega_n}{c}x\right)\bar{B}_n = 0$$

$$\Rightarrow \bar{B}_n = 0$$

(2) $w(x,t=0) = w_A(x)$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\omega_n}{c}x\right)\bar{A}_n$$

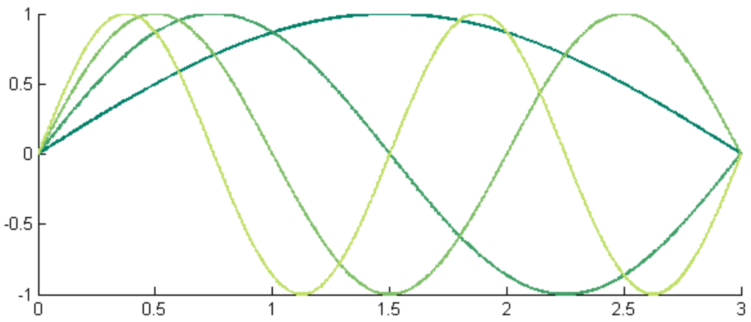
$\bar{A}_n$ sind die Koeffizienten der Fourierreihen-entwicklung! → Mathe.

⇒ Gesamtlösung:

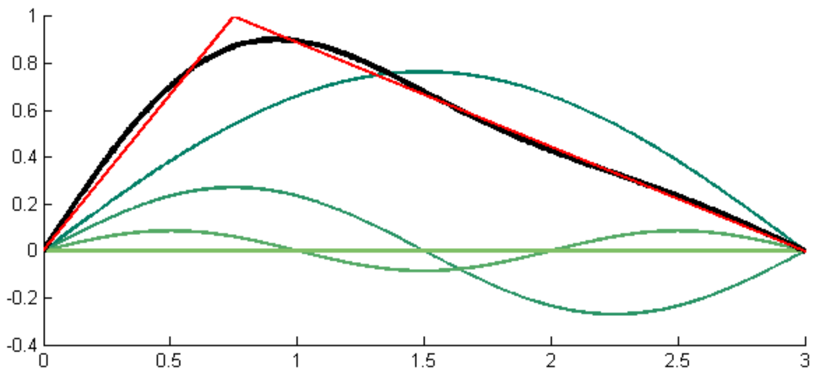
$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n \cos(\omega_n t)\sin\left(\frac{\omega_n}{c}x\right)$$

Zu Aufgabenteil c)

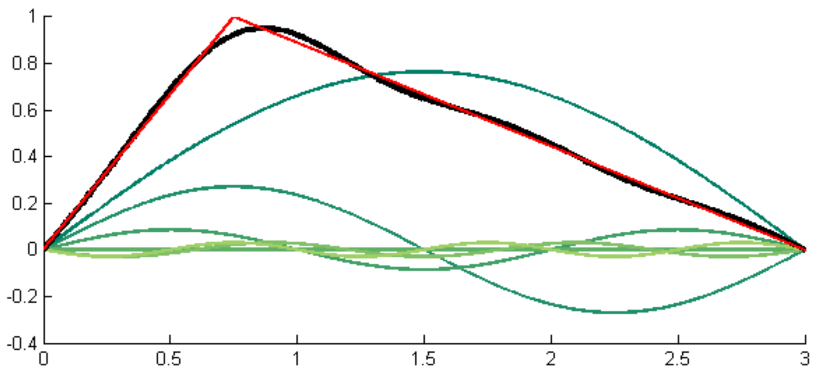
Eigenformen 1-4



Überlagerung der ersten vier Eigenformen



Überlagerung der ersten sechs Eigenformen



Überlagerung der ersten fünfzehn Eigenformen