2. Klausur Kontinuumsmechanik — WiSe 2011/2012

Prof. Dr. rer. nat. Valentin Popov

Dieser Kasten ist vor der Bearbeitung der Klausur **vollständig** und **lesbar** auszufüllen!

Nachname	________________	Vorname	________________
Studiengang	________________	Matrikelnummer	________________

Aufgabe	1	2	3	4	Σ 1 - 4	5	Sichtung
erreichte Punkte					/ 40	/ 10	

Die Klausur umfasst 5 Aufgaben. Die Klausur gilt als bestanden, wenn mindestens 20 von 50 Punkten erreicht werden. Dabei muss Aufgabe 5 (Kurzfragen) mit mind. 5 von 10 Punkten bestanden werden. Tragen Sie die Ergebnisse des **Kurzfragenteils direkt auf dem Klausurblatt** ein, nur diese Eintragungen werden berücksichtigt! Es werden **alle** Rechenaufgaben gewertet. Bitte sauber schreiben, unlesbare Lösungen werden **nicht** beachtet.

1 (Bekannte Aufgabe) (2+2+4=8 Punkte)

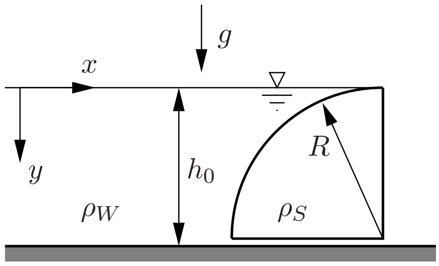
Eine transportable Hochwassersperre sei viertelzylinderförmig mit dem Radius R und der Breite b senkrecht zur Zeichenebene ausgeführt. Sie besteht aus homogenem Material der Dichte $\rho_S = 3 \cdot \rho_W$. Die Sperre liegt lose auf dem Grund. Es sei angenommen, dass zwischen Sperre und Grund kein Wasser eindringt und dass dort der Haftreibungskoeffizient μ_0 wirksam ist. Es soll der höchste Wasserstand $h_0 = R$ betrachtet werden.

(a) Wie groß ist die Horizontalkraft F_x des Wassers auf die Sperre?

(b) Wie groß ist die Vertikalkraft F_y des Wassers auf die Sperre?

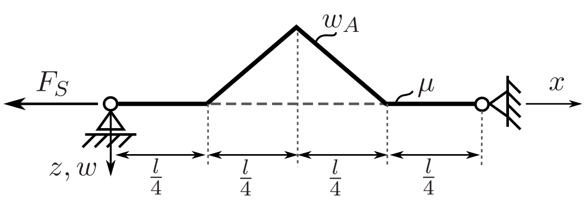
(c) Wie groß muss der Haftungskoeffizient μ_0 mindestens sein, damit die Sperre nicht wegrutscht?

Geg.: ρ_W, R, b, g



2 (Ansatz von d'Alembert) (3+1+1+3+2=10 Punkte)

Eine Saite der Länge l wird mit mit der Kraft F_S vorgespannt und trägt die Masse pro Länge μ. Die Saite wird zur Zeit $t = 0$ wie dargestellt ausgelenkt, die Anfangsauslenkung $w_A(x)$ ist bekannt und hat in der Mitte der Saite die Form eines gleichschenkligen Dreiecks (Breite $\frac{l}{2}$, Höhe w_0). Die Anfangsgeschwindigkeit ist Null.



(a) Leiten Sie die das System beschreibende Differentialgleichung her. Schneiden Sie dafür ein infinitesimales Stück der Saite frei und untersuchen Sie die Bewegung in z-Richtung.

(b) Wie lautet der D'ALEMBERTsche Ansatz zur Lösung der Bewegungsgleichung?

(c) Geben Sie die Randbedingungen des Systems an.

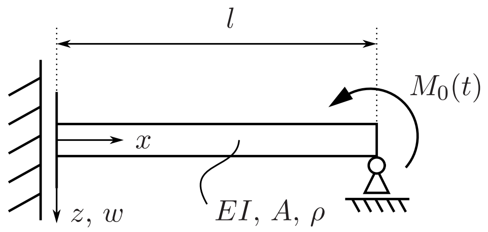
(d) Skizzieren Sie die Auslenkung der Saite zu den folgenden Zeitpunkten: $t_1 = \frac{l}{4}\sqrt{\frac{\mu}{F_S}}$, $t_2 = \frac{l}{2}\sqrt{\frac{\mu}{F_S}}$, $t_3 = \frac{3l}{4}\sqrt{\frac{\mu}{F_S}}$. Fertigen Sie einzelne Skizzen für die drei Zeitpunkte an.

(e) Wie groß ist die Zeit T, die vergeht bevor die Saite sich das erste Mal wieder in der Anfangskonfiguration befindet? Wie groß ist die erste Eigenkreisfrequenz ω_1 der Saite?

Geg.: F_S, μ, l, $w(x, t = 0) = w_A(x)$, $\frac{\partial w}{\partial t}|_{(x,t=0)} = 0$

3 (Erzwungene Kontinuumsschwingungen) (1+4+2+4+3=14 Punkte)

Ein elastischer, massebehafteter Balken (Biegesteifigkeit EI, Länge l, Querschnittsfläche A und Dichte ρ) ist am linken Rand durch eine vertikal verschiebliche Schiene und am rechten Rand durch ein Loslager gestützt. Am rechten Ende greift ein harmonisches Moment $M_0(t) = \hat{M} \sin \Omega t$ an. Unter Vernachlässigung der Dämpfung soll die Bewegung im eingeschwungenen Zustand untersucht werden.



(a) Geben Sie die das Problem beschreibende partielle Differentialgleichung an (ohne Herleitung).

(b) Verwenden Sie einen geeigneten Produktansatz für $w(x,t)$ und leiten Sie die gewöhnliche Differentialgleichung in x her. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f(x) = A^* \cos \kappa x + B \sin \kappa x + C \cosh \kappa x + D \sinh \kappa x$$

eine Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung ist (mit A^*, B, C, D als Konstanten). Wie muss in diesem Fall κ definiert werden?

(c) Geben Sie die Randbedingungen des Systems an.

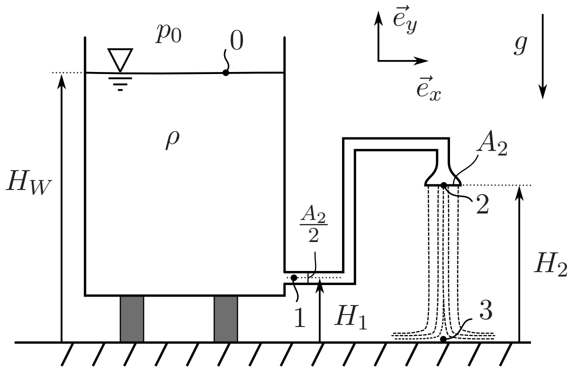
(d) Bestimmen Sie die Lösung für $w(x,t)$ im eingeschwungenen Zustand.

(e) Untersuchen Sie das Übertragungsverhalten des Systems zwischen Anregungsmoment und Biegewinkel am rechten Ende indem Sie die Funktion $V(\kappa)$ entsprechend der Gleichung $w'(l,t) = V(\kappa) \cdot M_0(t)$ bestimmen. Nennen Sie eine Anregungsfrequenz Ω_R, für die Resonanz auftritt.

Geg.: $\hat{M}$, Ω, l, EI, A, ρ

4 (Dynamik idealer Flüssigkeiten) (2+2+3+1=8 Punkte)

Ein Kleingärtner installiert sich eine Regenwasserdusche im Garten. Am Duschkopf (Punkt 2) gibt es einen Auslass der Querschnittsfläche A_2, die Leitung habe die halbe Querschnittsfläche. Gehen Sie bei Ihren Berechnungen von einem reibungsfreien, inkompressiblen Fluid aus. Der Tank sei so groß, dass das Absinken des Wasserspiegels vernachlässigt werden kann.
Geben Sie Ihre Ergebnisse stets <u>in Abhängigkeit der unten gegebenen Größen</u> an.



(a) Welche Höhe H_W ist nötig, damit am Duschkopf (Punkt 2) der gewünschte Volumenstrom Q_D abgenommen werden kann?

(b) Welcher Druck herrscht dann im Punkt 1?

(c) Bestimmen Sie die Kraft $\vec{F}_D = F_{Dy}\,\vec{e}_y$, die im Punkt 3 auf den Boden ausgeübt wird.

(d) Nennen Sie eine Möglichkeit, die Abmessungen des Systems so zu verändern, dass die Kraft im Punkt 3 genau verdoppelt wird.

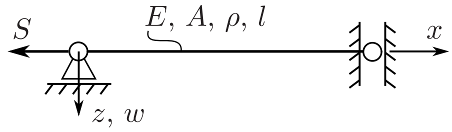
Geg.: H_1, H_2, A_2, p_0, Q_D, ρ, g

5 Kurzfragen 10 Punkte

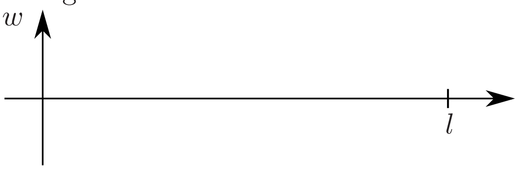
1. Geben Sie die Maßeinheiten folgender Größen **ausschließlich** in den Einheiten 1, kg, m und s an:

Druckdifferenz Δp	
Wellenausbreitungsgeschwindigkeit c	
Fluiddichte ρ_F	
Dynamische Viskosität η	

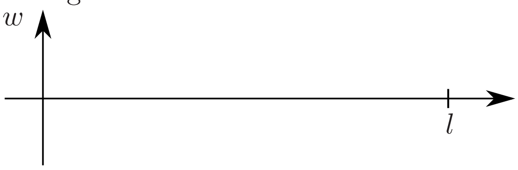
2. Für die abgebildete Saite der Länge l sollen qualitativ die <u>zweite und dritte</u> Eigenform skizziert werden. Berücksichtigen Sie die Randbedingungen.



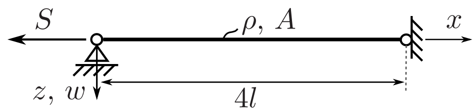
2. Eigenform



3. Eigenform



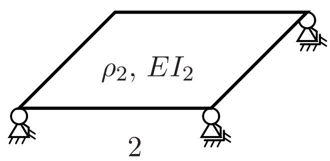
3. Betrachten Sie eine Saite (Dichte ρ, Länge $4l$, Querschnittsfläche A) unter der Vorspannkraft S. Die Auslenkung der Saite wird durch eine Koordinate $w(x,t)$ gemessen. Geben Sie die Schwingungsdifferentialgleichung des Systems in Abhängigkeit gegebener Größen an.



Geg.: l, A, ρ, S

4. Zwei Systeme sollen verglichen werden. Das erste System ist ein BERNOULLI-Balken der Länge l, das zweite System ist eine gelenkig gelagerte elastische Platte (Breite a, Tiefe b, Dicke t). Beide führen freie Biegeschwingungen aus. Tragen Sie für beide Systeme die Anzahl an Eigenfrequenzen ein.

1



2

5. Gegeben ist die Differentialgleichung

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0$$

Darin sei λ eine bekannte Systemgröße. Welche der folgenden Funktionen sind Lösungen dieser Differentialgleichung (A und B seien beliebige Konstanten)? Kreuzen Sie an.

- ☐ $X(x) = A \cdot x + B$
- ☐ $X(x) = A \cdot \sinh(\lambda x)$
- ☐ $X(x) = A \cdot \cos(\lambda x)$
- ☐ $X(x) = A \cdot e^{i\lambda x}$

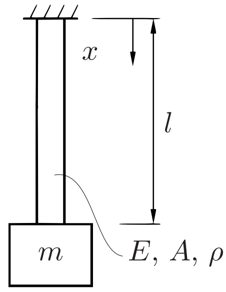
Geg.: $A, B =$const., λ, imaginäre Einheit i

6. Mia und Ben berechnen die Frequenzgleichung zur Bestimmung der Eigenkreisfrequenzen ω_k der Longitudinalschwingungen für den skizzierten längshomogenen Stab.

   Mias Lösung ist $\tan\left(\sqrt{\rho/E}\, l\omega_k\right) = \frac{\rho A}{m}\sqrt{E/\rho}\,\frac{1}{\omega_k}$

   Bens Lösung ist $\tanh\left(\sqrt{\rho/E}\, l\omega_k\right) = \frac{\rho A}{m}\sqrt{E/\rho}\,\frac{1}{\omega_k}$

   Wer von beiden hat Recht? Begründen Sie Ihre Antwort.

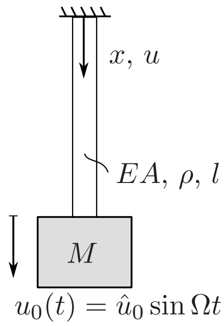


   Geg.: E, A, ρ, m, l

---

7. Ein linear elastischer, längshomogener Stab ist wie skizziert gelagert. An der Einzelmasse M wird dem System eine Verschiebung $u_0(t)$ aufgezwungen. Was beeinflusst die **Frequenz der Schwingung im eingeschwungenen Zustand**?

   - [ ] Längssteifigkeit EA
   - [ ] Anregungsfrequenz Ω
   - [ ] Anregungsamplitude $\hat{u}_0$
   - [ ] Gewicht der Einzelmasse M



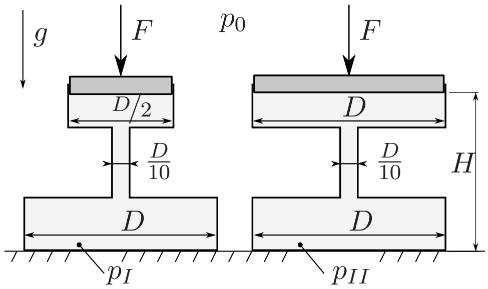
   Geg.: EA, ρ, l, M, $\hat{u}_0$, Ω,

---

8. Zwei zylindrische Gefäße (Durchmesser entsprechend Skizze) ähnlicher Form sind bis Höhe H mit gleicher Flüssigkeit (Dichte ρ) gefüllt. Über einen passenden Kolben (dunkelgrau) wird jeweils die Kraft F aufgebracht. Es herrsche der Außendruck p_0. Vergleichen Sie den Druck auf die Böden im Gefäßinneren.

   (<, >, =)

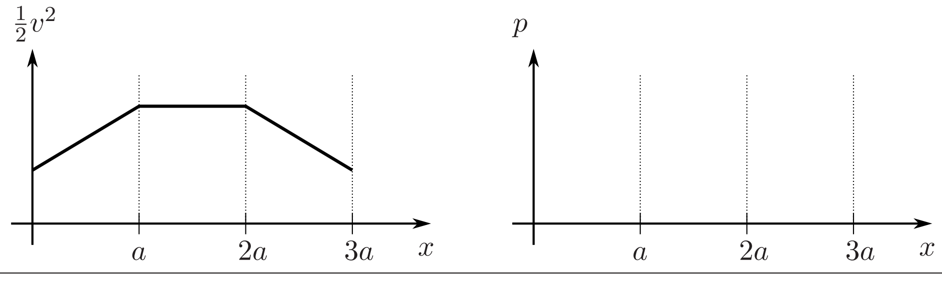
   p_I ☐ p_{II}



   Geg.: ρ, D, F, g, H, p_0

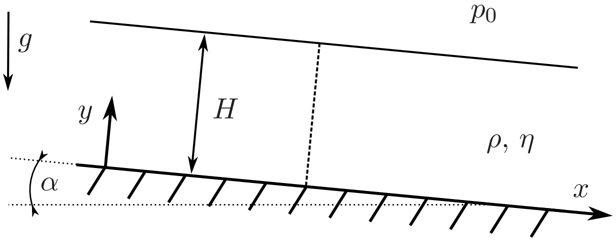
---

9. In einem ebenen Leitungssystem der Länge $3a$ (keine Gravitation, reibungsfreies, inkompressibles Fluid) soll ein vorgegebener Geschwindigkeitsverlauf eingestellt werden. Skizzieren Sie qualitativ den zugehörigen Druckverlauf in der Leitung.



---

10. Auf einer geneigten Ebene bildet sich aufgrund der Gravitation eine ebene, offene viskose Strömung der Schichtdicke H aus. Es handelt sich um ein NEWTONsches Fluid. Skizzieren Sie qualitativ das Geschwindigkeitsprofil $v_x(y)$, das sich einstellt.



    Geg.: g, H, ρ, η, p_0, $\alpha > 0$