Aufgabe 1

(a)

$$p(y) = \rho_W g y \tag{1}$$

$$\mathrm{d}F_x = p(y)\,\mathrm{d}A_y \tag{2}$$

$$\mathrm{d}F_x = \rho_W g y \underbrace{b\,\mathrm{d}y}_{\mathrm{d}A_y} \tag{3}$$

Die gesamte Kraft erhalten wir durch bestimmtes Integrieren. Dabei läuft y zwischen 0 (Wasseroberfläche) und R (Grund).

$$F_x = \int_0^R \rho_W g b y\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\rho_W g b R^2 \tag{4}$$

(b) Die vertikale Komponente der Kraft ist gleich dem Gewicht der Flüssigkeit, welche sich oberhalb der Fläche befindet:

$$F_y = \underbrace{\rho_W b R^2 \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)}_{m_{\text{Wasser}}} g \tag{5}$$

(c) Die zusätzlich wirkende Gewichtskraft der Sperre ist

$$G = \frac{\pi}{4} R^2 b \rho_S g = \frac{3\pi}{4} R^2 b \rho_W g \tag{6}$$

Die Haftbedingung lautet

$$H \leq \mu N \quad \text{mit} \tag{7}$$

$$H = F_x = \frac{1}{2}\rho_W g b R^2 \tag{8}$$

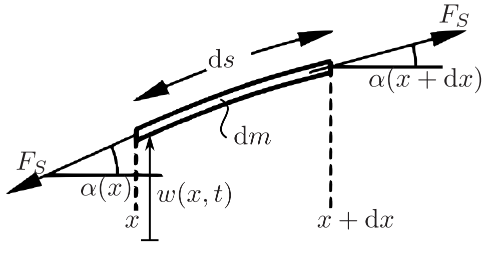
$$N = F_y + G = \left(1 + \frac{\pi}{2}\right)\rho_W g b R^2 \tag{9}$$

Der Grenzfall tritt ein, wenn beide Seiten gleich groß sind. Der Haftkoeffizient ist dann

$$\mu = \frac{H}{N} = \frac{\frac{1}{2}\rho_W g b R^2}{\left(1 + \frac{\pi}{2}\right)\rho_W g b R^2} = \frac{1}{2+\pi} \tag{10}$$

Aufgabe 2

(a)



2. NG:

$$\mathrm{d}m\ddot{w} = F_S \sin(\alpha + \mathrm{d}\alpha) - F_S \sin(\alpha) \tag{11}$$

$$\Leftrightarrow \mu\ddot{w} = F_S \alpha' = F_S w'' \tag{12}$$

$$\Leftrightarrow \ddot{w} = \underbrace{\frac{F_S}{\mu}}_{c^2} w'' \tag{13}$$

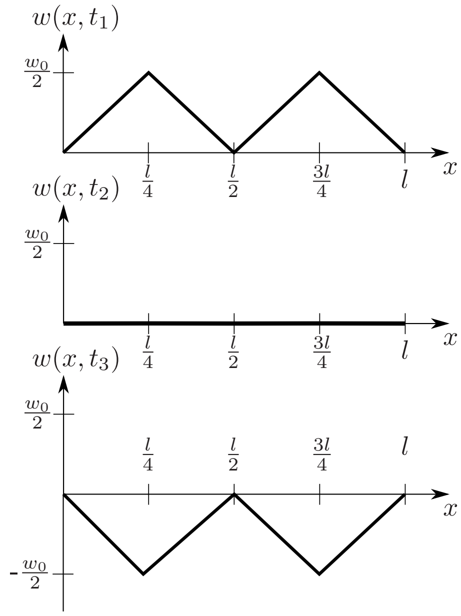
(b)

$$w(x,t) = f_1(x+ct) + f_2(x-ct) \tag{14}$$

(c)

$$w(0,t) = 0\,, w(l,t) = 0 \tag{15}$$

(d)



(e)

$$T = 8t_1 = 2l\sqrt{\frac{\mu}{F_S}} \tag{16}$$

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{l}\sqrt{\frac{F_S}{\mu}} \tag{17}$$

Aufgabe 3

(a)
$$\rho A\ddot{w} + EI\,w^{IV} = 0 \tag{18}$$

(b)
$$w(x,t) = W(x)\sin\Omega t \tag{19}$$

$$\Rightarrow \quad -EI\,W^{IV} = -\rho A\Omega^2 W$$
$$\Rightarrow \quad W^{IV} - \underbrace{\frac{\rho A}{EI}\Omega^2}_{\kappa^4} W = 0 \tag{20}$$

Überprüfe Lösung:

$$f^{IV}(x) = \kappa^4 f(x) \tag{21}$$
$$\Rightarrow \kappa^4 f(x) - \kappa^4 f(x) = 0 \quad \checkmark \tag{22}$$

(c)
$$w'(0,t) = 0 \Rightarrow W'(0) = 0 \tag{23}$$
$$w(l,t) = 0 \Rightarrow W(l) = 0 \tag{24}$$
$$Q(0,t) = 0 \Rightarrow W'''(0) = 0 \tag{25}$$
$$M(l,t) = M_0(t) \Rightarrow -EI\,W''(l) = \hat{M} \tag{26}$$

(d) Lösen der Konstanten: Aus (23) und (25) folgt

$$W'(0) = \kappa B + \kappa D = 0 \tag{27}$$
$$\hookrightarrow B + D = 0 \tag{28}$$
$$W'''(0) = \kappa^3(-B + D) = 0 \tag{29}$$
$$\hookrightarrow B - D = 0 \tag{30}$$
$$\Rightarrow \quad B = D = 0 \tag{31}$$

Aus (24) und (26) lassen sich die nichttrivialen Konstanten bestimmen.

$$A^* = \frac{\hat{M}}{2\,EI\,\kappa^2\,\cos\kappa l} \tag{32}$$
$$C = -\frac{\hat{M}}{2\,EI\,\kappa^2\,\cosh\kappa l} \tag{33}$$

$$w(x,t) = \frac{\hat{M}}{2\,EI\,\kappa^2}\left(\frac{\cos\kappa x}{\cos\kappa l} - \frac{\cosh\kappa x}{\cosh\kappa l}\right)\sin\Omega t \tag{34}$$

(e)
$$w'(l) = \kappa\left(-A^*\sin\kappa l + C\sinh\kappa l\right)\sin\Omega t \tag{35}$$
$$= \frac{1}{2\,EI\,\kappa}\left(-\frac{\sin\kappa l}{\cos\kappa l} - \frac{\sinh\kappa l}{\cosh\kappa l}\right)\hat{M}\sin\Omega t \tag{36}$$
$$\Rightarrow V(\kappa) = \frac{1}{2\,EI\,\kappa}\left(-\frac{\sin\kappa l}{\cos\kappa l} - \frac{\sinh\kappa l}{\cosh\kappa l}\right) \tag{37}$$

Resonanz tritt auf wenn $\cos\kappa l = 0$, z.B.

$$\kappa l = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \Omega_R = \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}\left(\frac{\pi}{2l}\right)^2 \tag{38}$$

Aufgabe 4

(a)
$$Q_D = A_2 v_2 \quad \Rightarrow \quad v_2 = \frac{Q_D}{A_2} \tag{39}$$

Bernoulli von 0 nach 2:

$$\frac{p_0}{\rho} + 0 + gH_W = \frac{p_0}{\rho} + \frac{1}{2}v_2^2 + gH_2 \tag{40}$$

$$\Rightarrow \quad H_W = \frac{1}{2g}\left(\frac{Q_D}{A_2}\right)^2 + H_2 \tag{41}$$

(b)
$$\frac{A_2}{2}v_1 = A_2 v_2 \quad \Rightarrow \quad v_1 = 2v_2 \tag{42}$$

Bernoulli von 1 nach 2:

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{1}{2}v_1^2 + gH_1 = \frac{p_0}{\rho} + \frac{1}{2}v_2^2 + gH_2 \tag{43}$$

$$\Rightarrow \quad p_1 = p_0 - \frac{3}{2}\rho\left(\frac{Q_D}{A_2}\right)^2 + \rho g(H_2 - H_1) \tag{44}$$

(c)
$$-\vec{F}_D = J(\vec{0} - \vec{v}_3) \quad \text{oder} \tag{45}$$
$$F_{Dy} = -Jv_3 \tag{46}$$

$$J = Q_D\,\rho \tag{47}$$

Bernoulli von 2 nach 3:

$$\frac{p_0}{\rho} + \frac{1}{2}v_2^2 + gH_2 = \frac{p_0}{\rho} + \frac{1}{2}v_3^2 + 0 \tag{48}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{v}_3 = -\sqrt{\left(\frac{Q_D}{A_2}\right)^2 + 2gH_2}\;\vec{e}_y \tag{49}$$
$$\Rightarrow \quad \vec{F}_D = -Q_D\rho\sqrt{\left(\frac{Q_D}{A_2}\right)^2 + 2gH_2}\;\vec{e}_y \quad \text{oder} \tag{50}$$
$$F_{Dy} = -Q_D\rho\sqrt{\left(\frac{Q_D}{A_2}\right)^2 + 2gH_2} \tag{51}$$

(d) A_2 halbieren und H_2 vervierfachen. Oder:

$$H_2^* \quad \rightarrow \quad 4H_2 + \frac{3}{2g}\left(\frac{Q_D}{A_2}\right)^2 \quad \text{Oder :} \tag{52}$$

$$A_2^* \quad \rightarrow \quad \frac{Q_D}{\sqrt{4\left(\frac{Q_D}{A_2}\right)^2 + 6gH_2}} \tag{53}$$