1. Klausur Kontinuumsmechanik — WiSe 2011/2012

Prof. Dr. rer. nat. Valentin Popov

Dieser Kasten ist vor der Bearbeitung der Klausur **vollständig** und **lesbar** auszufüllen!

Nachname	____________	Vorname	____________
Studiengang	____________	Matrikelnummer	____________

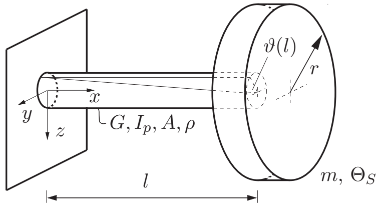
Aufgabe	1	2	3	4	Σ 1 - 4	5	Korrektor_in
erreichte Punkte					/ 40	/ 10	

Die Klausur umfasst 5 Aufgaben. Die Klausur gilt als bestanden, wenn mindestens 20 von 50 Punkten erreicht werden. Dabei muss Aufgabe 5 (Kurzfragen) mit mind. 5 von 10 Punkten bestanden werden. Tragen Sie die Ergebnisse des **Kurzfragenteils direkt auf dem Klausurblatt** ein, nur diese Eintragungen werden berücksichtigt! Es werden **alle** Rechenaufgaben gewertet. Bitte sauber schreiben, unlesbare Lösungen werden **nicht** beachtet.

1 (Bekannte Aufgabe) (3+1+2+2=8 Punkte)

Ein eingespannter, massebehafteter Stab mit kreisförmigem Querschnitt trägt an seinem Ende eine Einzelmasse (Masse m, Trägheitsmoment Θ_S bzgl. des Schwerpunkts). Geeignete Anfangsbedingungen lassen den Stab um seine Längsachse schwingen.

Geg.: l, m, Θ_S, G, I_p, A, ρ, r



(a) Geben Sie die partielle Differentialgleichung für die freie Torsionsschwingung an (Herleitung nicht erforderlich) und überführen Sie diese mit Hilfe eines Separationsansatzes in 2 gewöhnliche Differentialgleichungen.

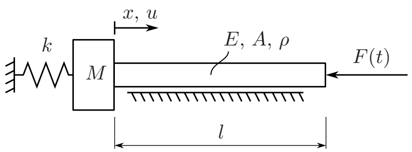
(b) Wie lauten die allgemeinen Lösungen dieser gewöhnlichen Differentialgleichungen?

(c) Formulieren Sie die geometrischen und die dynamischen Randbedingungen.

(d) Stellen Sie die Frequenzgleichung auf.

2 (Erzwungene Kontinuumsschwingungen) (3+2+4+4+2=15 Punkte)

Ein elastischer längshomogener Stab (Länge l, Elastizitätsmodul E, Querschnittsfläche A, Dichte ρ) führt erzwungene Longitudinalschwingungen aus. Der Stab ist reibungsfrei gelagert. Am rechten Ende greift eine harmonische Kraft $F(t) = F_0 \cos \Omega t$ an, am linken Ende ist eine Einzelmasse M angebracht, die über eine linear elastische Feder der Steifigkeit k befestigt ist.



Die Feder ist für $u(0,t) = 0$ entspannt. Unter Vernachlässigung der Dämpfung soll die Bewegung im eingeschwungenen Zustand untersucht werden. Verwenden Sie die Abkürzungen $c^2 := \frac{E}{\rho}$, $\lambda := \frac{\Omega}{c}$.

(a) Schneiden Sie ein infinitesimales Stück Stab heraus und leiten Sie anhand dessen die das Problem beschreibende partielle Differentialgleichung her.

(b) Verwenden Sie den Ansatz $u(x,t) = V(x) \cos \Omega t$ und leiten Sie die gewöhnliche Differentialgleichung in x her. Geben Sie deren allgemeine Lösung an.

(c) Geben Sie die Randbedingungen des Systems an. Überführen Sie sie in Bedingungen an $V(x)$.

Betrachten Sie ab hier den Fall $\underline{k \to \infty}$ (unendlich steife Feder).

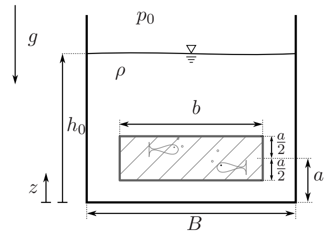
(d) Bestimmen Sie die Lösung für $u(x,t)$ im eingeschwungenen Zustand und geben Sie die Resonanzkreisfrequenzen des Systems an.

(e) Bestimmen Sie die Verschiebung des rechten Endes $u(x = l, t)$ für die Grenzfälle $\Omega \to 0$ und $\Omega \to \infty$.

Geg.: F_0, Ω, M, k, l, E, A, ρ

3 (Dynamik idealer Flüssigkeiten) (2+2+2+4+1=11 Punkte)

Abgebildet ist ein Wasserbecken (Breite B, Gesamtlänge L) mit einem Anfangswasserstand h_0. Im unteren Bereich ist ein großes Fenster (Breite b, Höhe a) zu Beobachtungszwecken eingelassen. Das Wasser sei inkompressibel (Dichte ρ) und reibungsfrei. Beachten Sie die Zählrichtung der Koordinate z.



(a) Skizzieren Sie den Verlauf des Druckes $p(z)$, der im Inneren des Beckens auf das Fenster wirkt für $z \in (\frac{a}{2}, \frac{3a}{2})$ und geben Sie $p(\frac{a}{2})$ und $p(\frac{3a}{2})$ an.

(b) Die Verbindung zwischen Fenster und Becken kann eine maximale Kraft F_K aushalten. Bei welcher Füllhohe h_{max} wird diese Kraft in der Verbindung erreicht?

(c) Nehmen Sie an, das Fenster sei an der Unterkante undicht, so dass dort ein Spalt (Spaltmitte bei $z = \frac{a}{2}$) der Breite b und der Höhe s entstehe. Bestimmen Sie mit Hilfe der BERNOULLIschen Gleichung für einen Stromfaden die Austrittsgeschwindigkeit $v_A(h)$ unter der Annahme, dass der Wasserspiegel nicht absinkt.

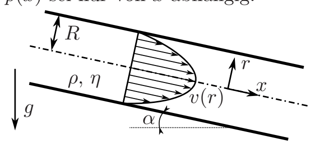
(d) Verwerfen Sie die Annahme des nicht-sinkenden Wasserspiegels und bestimmen Sie nun mit Hilfe des in (c) bestimmten $v_A(h)$ und der Kontinuitätsgleichung die Geschwindigkeit des sinkenden Wasserspiegels $v_S(h)$ und die Zeit T, die vergeht bis der Wasserspiegel die Oberkante des Fensters bei $z = \frac{3a}{2}$ erreicht hat.

(e) Fertigen Sie eine qualitative Skizze für den Verlauf der Füllhöhe $h(t)$ mit $t \in (0, T)$ an. Geben Sie Anfangs- und Endwert an.

Geg.: p_0, g, h_0, B, L, b, a, s, ρ, F_K

4 (Viskose Strömungen) (2+4=6 Punkte)

Im Gravitationsfeld wird ein kreisrundes Rohr (Radius R, Neigungswinkel gegenüber der Horizontalen α) betrachtet, durch das eine Newtonsche Flüssigkeit (dynamische Viskosität η, Dichte ρ) fließt. Es soll von stationärer, laminarer Strömung ausgegangen werden. Der Druck $p = p(x)$ sei nur von x abhängig.



(a) Schneiden Sie einen koaxialen Zylinder mit Radius r und Länge dx frei und tragen Sie alle Kräfte und Spannungen an, die das Strömungsprofil beeinflussen.

(b) Bestimmen Sie den Geschwindigkeitsverlauf $v(r)$ und passen Sie ihn an die Randbedingungen an. Der Druckgradient $\frac{\partial p}{\partial x}$ sei bekannt.

Geg.: R, ρ, η, α, g, $\frac{\partial p}{\partial x}$

$\boxed{5}$ Kurzfragen — 10 Punkte

1. Geben Sie die Maßeinheiten folgender Größen **ausschließlich** in den Einheiten 1, kg, m und s an:

Massenbelegung einer Saite μ	
Eigenkreisfrequenz ω	
Massentrom J	
Geschwindigkeitsgradient $\frac{\partial v_x}{\partial y}$	

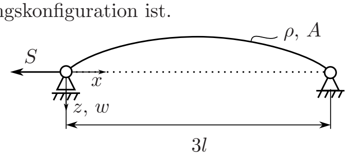
2. Betrachten Sie einen einseitig fest eingespannten, längshomogenen linear elastischen Stab mit kreisrundem Querschnitt als schwingfähiges System. Vergleichen Sie die Wellenausbreitungsgeschwindigkeiten der Longitudinalwellen c_L und der Torsionswellen c_T im System. Tragen Sie das korrekte Vergleichssymbol ein.

$(<, >, =)$

$c_L \; \square \; c_T$

3. Betrachten Sie eine Saite (Dichte ρ, Länge $3l$, Querschnittsfläche A) unter der Vorspannkraft S. Die Anfangsauslenkung $w(x, 0)$ ist skizziert, die Anfangsgeschwindigkeit ist Null. Geben Sie die Zeit T an, die vergeht bis die Saite das erste Mal wieder in ihrer Anfangskonfiguration ist.

T=



Geg.: l, A, ρ, S, $w(x, 0) = w_A(x)$, $\dot{w}(x, 0) = 0$

4. Für die erzwungenen Schwingungen eines Kontinuums wurde die folgende Lösung im eingeschwungenen Zustand bestimmt:

$$w(x,t) = \frac{M_0 c_B}{2EI\Omega}\left(\frac{\sin\sqrt{\frac{\Omega}{c_B}}x}{\sin\sqrt{\frac{\Omega}{c_B}}L} - \frac{\sinh\sqrt{\frac{\Omega}{c_B}}x}{\sinh\sqrt{\frac{\Omega}{c_B}}L}\right)\cos\Omega t$$

Geben Sie die Erregerkreisfrequenzen $\Omega_{R,n}$ an, für die Resonanz auftritt.

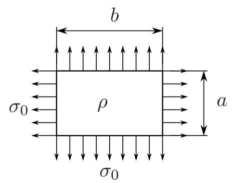
$\Omega_{R,n} =$

Geg.: M_0, c_B, EI, L

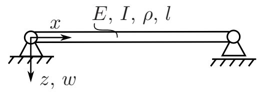
5. Eine rechteckige Membran (Breite b, Höhe a, Dichte ρ) ist mit der Spannung σ_0 gespannt. Die Membran sei t_M dick. Welche Maßnahmen führen zu niedrigeren Eigenfrequenzen des Systems? Kreuzen Sie an.

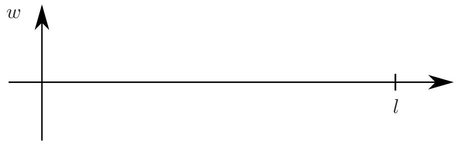
☐ a und b vergrößern ☐ σ_0 vergrößern

☐ Das Verhältnis $\frac{\sigma_0}{\rho}$ vergrößern ☐ Dichte ρ vergrößern



6. Für den abgebildeten längshomogenen Balken der Länge l soll die zweite Biegeeigenform skizziert werden. Berücksichtigen Sie die Randbedingungen.





7. Ein kugelförmiger Körper mit Radius R schwimmt in einer Flüssigkeit der Dichte ρ_F. Es wirkt das Gravitationsfeld g. Wie groß muss die mittlere Dichte $\overline{\rho}_K$ des Körpers sein, damit er grade zur Hälfte eingetaucht ist?

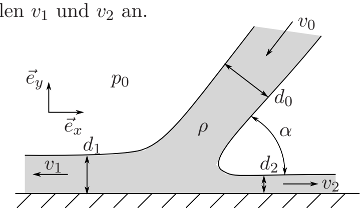
$\overline{\rho}_K =$

Geg.: R, ρ_F, g

8. Ein offener Strahl eines reibungsfreien Fluids (Dichte ρ, Breite d_0) trifft mit der Geschwindigkeit v_0 unter dem Winkel α auf eine feste Wand und wird in zwei Teile aufgespalten. Der Strahl sei über die Länge L senkrecht zur Zeichenebene ausgedehnt. Die Strömung sei stationär, es herrsche keine Gravitation. Geben Sie die Geschwindigkeiten der Teilstrahlen v_1 und v_2 an.

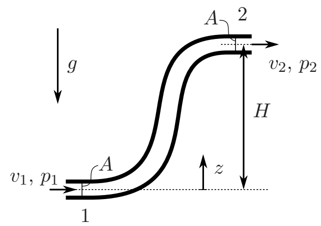
$v_1 =$

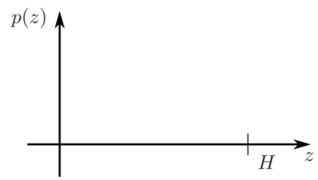
$v_2 =$



Geg.: ρ, d_0, v_0, α, p_0, L

9. Ein Teil eines Leitungssystems hebt sich wie dargestellt um die Höhe H. Skizzieren Sie den Druckverlauf von p_1 nach p_2 über $z \in (0, H)$.





Geg.:A, v_1, H

10. Eine Schicht eines NEWTONschen Fluids (Dichte ρ, dynamische Viskosität η, Schichtdicke t) fließt unter Gravitation g mit der Geschwindigkeit

$$v_x(y) = \frac{\rho\, g}{\sqrt{2}\,\eta}\left(t\, y - \frac{y^2}{2}\right)$$

in x-Richtung (ebene Strömung). Geben Sie den Verlauf der Schubspannung $\tau(y)$ an.

$\tau(y)=$

Geg.: ρ, η, t, g