Aufgabe 1

(a) Die Wellengleichung für Torsionsschwingungen lautet

$$\frac{\partial^2\vartheta}{\partial t^2} = \underbrace{\frac{G}{\rho}}_{c_D^2} \frac{\partial^2\vartheta}{\partial x^2} \tag{1}$$

Setze den Produktansatz nach Bernoulli

$$\vartheta(x,t) = X(x)T(t) \tag{2}$$

in die Wellendifferentialgleichung (1) ein:

$$\frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} = c_D^2 \frac{X''(x)}{X(x)} = konst. = -\omega^2 \tag{3}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} \ddot{T}(t) + \omega^2 T(t) &= 0 \\ X''(x) + \frac{\omega^2}{c_D^2} X(x) &= 0 \end{aligned} \tag{4}$$

(b) Lösungen für (4):

$$\begin{aligned} T(t) &= z_1 \sin\omega t + z_2 \cos\omega t \\ X(x) &= z_3 \sin\frac{\omega}{c_D}x + z_4 \cos\frac{\omega}{c_D}x \end{aligned} \tag{5}$$

(c)

$$\vartheta(x=0,t) = 0 \tag{RB 1}$$

ist eine geometrische Randbedingung. Freischneiden der Einzelmasse am rechten Ende liefert:

$$M(x=l,t) = -\Theta_S \left.\frac{\partial^2\vartheta}{\partial t^2}\right|_{x=l,t} \tag{6}$$

mit dem Materialgesetz $GI_p \frac{\partial\vartheta}{\partial x} = M$ ergibt sich

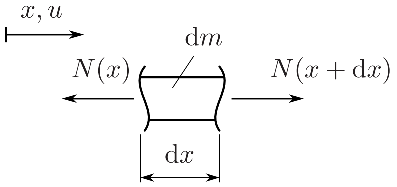
$$\left.\frac{\partial^2\vartheta}{\partial t^2}\right|_{x=l,t} + \frac{GI_p}{\Theta_S} \cdot \left.\frac{\partial\vartheta}{\partial x}\right|_{x=l,t} = 0 \tag{RB 2}$$

(d) In Gleichung (5) kann $z_2 = 0$ gesetzt werden. Aus (RB 1) folgt $z_4 = 0$.
Aus (RB 2) ergibt sich die Frequenzgleichung

$$\tan\frac{\omega}{c_D}l = \frac{GI_p}{\Theta_S c_D} \cdot \frac{1}{\omega} \tag{7}$$

Aufgabe 2

(a)



Das zweite Newtonsche Gesetz für das infinitesimale Stabelement zu einem bestimmten Zeitpunkt lautet:

$$\mathrm{d}m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = N(x+\mathrm{d}x) - N(x) \tag{8}$$

Durch $\mathrm{d}x$ geteilt und das Materialgesetz $N(x,t) = EA\,u(x,t)$ eingesetzt liefert

$$\rho A\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = N'(x) = EA\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{9}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad , c^2 = \frac{E}{\rho} \tag{10}$$

(b) Setzt man den Ansatz $u(x,t) = V(x)\cos\Omega t$ in (10) ein, erhält man

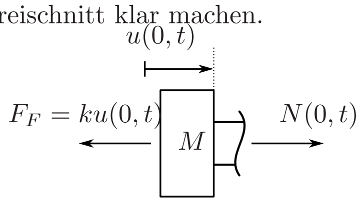
$$-\Omega^2 V(x)\cos\Omega t = c^2 V''(x)\cos\Omega t \tag{11}$$

$$\Leftrightarrow V''(x) + \underbrace{\frac{\Omega^2}{c^2}}_{=\lambda^2} V(x) = 0 \tag{12}$$

Die allgemeine Lösung dieser gewöhnlichen Differentialgleichung lautet

$$V(x) = B_1\cos\lambda x + B_2\sin\lambda x \tag{13}$$

(c) Wie die Randbedingungen lauten, kann man sich durch einen Freischnitt klar machen.



$$M\,\ddot{u}(0,t) = N(0,t) - k\,u(0,t) \tag{14}$$

Überführen dieser Randbedingung mit Hilfe des Ansatzes liefert

$$-\Omega^2 M\,V(0) = EA\,V'(0) - k\,V(0) \tag{15}$$

$$(k - M\Omega^2)\,V(0) = EA\,V'(0) \tag{16}$$

Am rechten Ende:

$$N(l,t) = -F(t) \tag{17}$$

Überführen dieser Randbedingung mit Hilfe des Ansatzes liefert

$$EA\,V'(l)\cos\Omega t = -F_0\cos\Omega t \tag{18}$$

$$V'(l) = -\frac{F_0}{EA} \tag{19}$$

(d) Für $k \to \infty$ wird (16) zu

$$V(0) = 0 \tag{20}$$

$$\Rightarrow B_1 = 0 \tag{21}$$

Aus (19) folgt

$$B_2 = -\frac{F_0}{EA\,\lambda\,\cos\lambda l} \tag{22}$$

Die Gesamtlösung lautet dann

$$u(x,t) = -\frac{F_0\sin\lambda x}{EA\,\lambda\,\cos\lambda l}\cos\Omega t \tag{23}$$

Das System ist in Resonanz für $\cos\lambda l \to 0$.

$$\Omega_{R,n} = \frac{(2n+1)\pi c}{2l} \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{24}$$

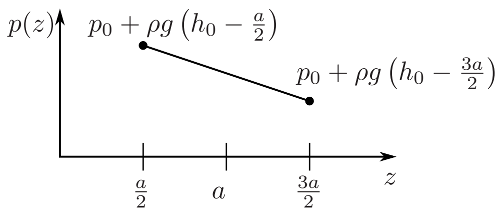
(e) Der Grenzfall $\Omega \to 0$ ist der statische Fall.

$$u(l,t) \overset{\Omega\to 0}{=} -\frac{F_0\, l}{EA} \tag{25}$$

$$u(l,t) \overset{\Omega\to\infty}{=} 0 \tag{26}$$

Aufgabe 3

(a)



(b) Von Außen wirkt der Außendruck auf das Fenster, daher ergibt sich das Kräftegleichgewicht zu

$$\rho g(h_0 - a)ab + p_0 ab = F_K + p_0 ab \quad \text{oder :} \tag{27}$$

$$\rho g(h_0 - a)ab = F_K \tag{28}$$

$$\Rightarrow F_K = \rho g(h_{\max} - a)ab$$

$$\Rightarrow h_{\max} = \frac{F_K}{\rho g a b} + a \tag{29}$$

(c) Die Bernoullische Gleichung für einen Stromfaden von der Wasseroberfläche bis zum Austritt lautet

$$\frac{p_0}{\rho} + \underbrace{\frac{1}{2}v_S^2}_{=0} + g h_0 = \frac{p_0}{\rho} + \frac{1}{2}v_A^2 + g\frac{a}{2} \tag{30}$$

$$\Rightarrow v_A(h) = \sqrt{2g\left(h - \frac{a}{2}\right)} \tag{31}$$

(d) Es gilt die Kontinuitätsgleichung.

$$v_S A_S = v_A A_A \tag{32}$$

Die Flächen sind bekannt: $A_S = B \cdot L$, $A_A = b \cdot s$. Es folgt

$$v_S(h) = \frac{bs}{BL}\sqrt{2g\left(h - \frac{a}{2}\right)} \tag{33}$$

Die Geschwindigkeit des Wasserspiegels ist die Änderung seiner Höhe mit der Zeit.

$$v_S(h) = -\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} \tag{34}$$

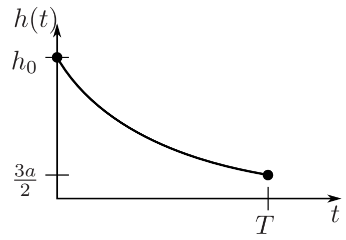
Trennung der Variablen und Integration:

$$\int_{h_0}^{\frac{3a}{2}} \frac{\mathrm{d}h}{\sqrt{h - \frac{a}{2}}} = -\int_0^T \frac{\sqrt{2g}\, bs}{BL}\mathrm{d}t \tag{35}$$

$$\left[2\sqrt{h - \frac{a}{2}}\,\right]_{h_0}^{\frac{3a}{2}} = -\frac{\sqrt{2g}\, bs}{BL}T \tag{36}$$

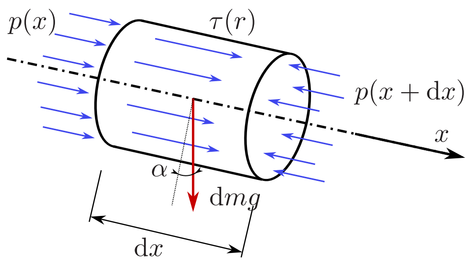
$$\Rightarrow T = \sqrt{\frac{2}{g}}\frac{BL}{bs}\left(\sqrt{h_0 - \frac{a}{2}} - \sqrt{a}\right) \tag{37}$$

(e)



Aufgabe 4

(a)



(b) Mit $\mathrm{d}m = \rho\pi r^2 \mathrm{d}x$ ergibt sich die Summe der Kräfte in x-Richtung zu Null:

$$\tau(r)\, 2\pi r \mathrm{d}x + (p(x) - p(x + \mathrm{d}x))\pi r^2 + \rho\pi r^2 \mathrm{d}x g \sin\alpha = 0 \tag{38}$$

$$2\tau(r) = \left(\frac{\partial p}{\partial x} - \rho g \sin\alpha\right) r \tag{39}$$

Newtonsches Fluid:

$$2\eta\frac{\partial v}{\partial r} = \left(\frac{\partial p}{\partial x} - \rho g \sin\alpha\right) r \tag{40}$$

Integration der Gleichung (40) liefert

$$v(r) = \frac{r^2}{4\eta}\left(\frac{\partial p}{\partial x} - \rho g \sin\alpha\right) + C \tag{41}$$

C wird durch die Randbedingung bestimmt. An der Rohrwand gilt die Wandhaftbedingung:

$$v(r = R) \overset{!}{=} 0 \tag{42}$$

$$\Rightarrow C = -\frac{R^2}{4\eta}\left(\frac{\partial p}{\partial x} - \rho g \sin\alpha\right) \tag{43}$$

$$\Rightarrow v(r) = \frac{r^2 - R^2}{4\eta}\left(\frac{\partial p}{\partial x} - \rho g \sin\alpha\right) \tag{44}$$