Energiemethoden der Mechanik

Lagrangegleichung 2. Art für konservative Systeme

Erinnerung: Konservative Kräfte können durch ein Potential dargestellt werden:

$$\boxed{-\frac{\partial U}{\partial q_j} = Q_j}$$

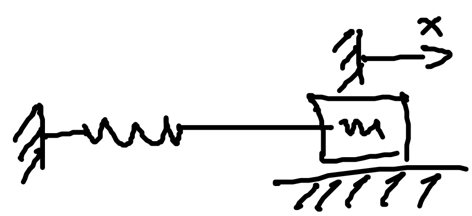
q_j: generalisierte Koordinate

Q_j: generalisierte Kraft

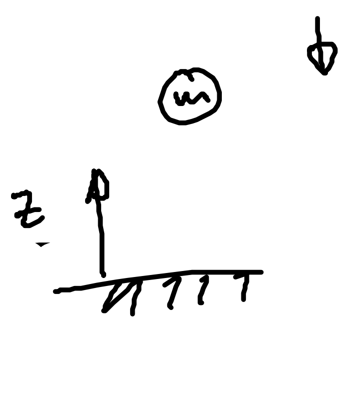
q_i: hat ein System n Freiheitsgrade beschreiben q_i mit $i = 1, \dots, n$ dieses System vollständig

$\dot{q}_i$: generalisierte Geschwindigkeiten

Bsp



$$U_F = \frac{1}{2} c \Delta x^2 = \frac{1}{2} c \cdots$$
$$= \frac{1}{2} c x^2$$



$$U = mgz$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0} \qquad i = 1, \dots, n$$

Lagrangegleichung 2. Art für kons. Kräfte

$L = K - U$ Lagrangefunktion

QUIZ:

① $U_\varphi = \frac{1}{2} c \varphi^2$ $\qquad Q_\varphi = - c\varphi$

② $K = \frac{1}{2} m \dot z^2 + \frac{1}{2} M \dot x^2 + \frac{1}{2} \Theta^s \dot\varphi^2$

AUFGABE 23

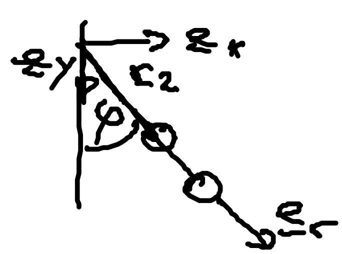
a) Bewegungsgleichungen

i) FG und generalisierte Koordinaten

2 FG $\longrightarrow$ $r(t) := r$ $\qquad \varphi(t) := \varphi$

ii) Geschwindigkeiten als Funktion von r, φ

$\boxed{\underline{r}_1 = l\,\underline{e}_r} = l\cos\varphi\,\underline{e}_y + l\sin\varphi\,\underline{e}_x$

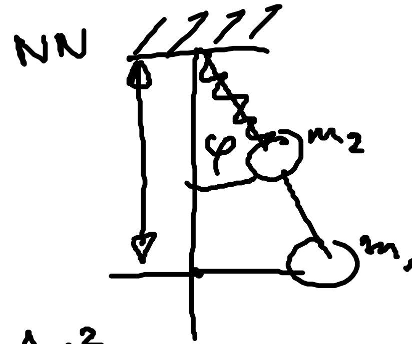


$\dot{\underline{r}}_1 = l\,\dot{\underline{e}}_r = l\dot\varphi\,\underline{e}_\varphi$

$\underline{r}_2 = r(t)\,\underline{e}_r$

$\dot{\underline{r}}_2 = \dot r\,\underline{e}_r + r\dot\varphi\,\underline{e}_\varphi$

iii) Lagrangefunktion



$$L = K - U$$

$$K = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$$

$$= \frac{1}{2} m_1 (l\dot{\varphi})^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(\dot{r}^2 + (r\dot{\varphi})^2\right)$$

$$U = - m_1 g l \cos\varphi - m_2 g r \cos\varphi + \frac{1}{2} c \underbrace{\Delta x^2}_{\substack{r - l_0 \\ l_0 - r}}$$

$$= - m_1 g l \cos\varphi - m_2 g r \cos\varphi + \frac{1}{2} c (r - l_0)^2$$

$$L = \frac{1}{2} m_1 (l\dot{\varphi})^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m_2 r^2 \dot{\varphi}^2 + m_1 g l \cos\varphi$$

$$+ \underline{m_2} g \underline{r \cos\varphi} - \frac{1}{2} c (r - l_0)^2$$

iv) Ableitungen bilden

r |

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) = m_2 \ddot{r}$$

$$\frac{\partial L}{\partial r} = m_2 r \dot{\varphi}^2 + m_2 g \cos\varphi - c(r - l_0)$$

φ |

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m_1 l^2 \dot{\varphi} + m_2 \overset{r r}{r^2} \dot{\varphi}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) = m_1 l^2 \ddot{\varphi} + m_2 r^2 \ddot{\varphi} + m_2 \dot{\varphi} (r\dot{r} + \dot{r} r)$$

$$\rightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial \varphi} = -m_1 g l \sin\varphi - m_2 g r \sin\varphi$$

iv) Bewegungsdglen aufstellen $\quad c := k$

(1) $\quad r: \quad \boxed{m_2 \ddot{r} - m_2 r \dot{\varphi}^2 - m_2 g \cos\varphi + c(r - l_0) = 0}$

(2) $\quad \varphi: \quad \boxed{0 = m_1 l^2 \ddot{\varphi} + m_2 r^2 \ddot{\varphi} + 2 m_2 \dot{\varphi} r \dot{r} + m_1 g l \sin\varphi + m_2 g r \sin\varphi}$

b) Grenzfälle betrachten

i) $r = l \qquad \dot{r} = 0 \qquad \ddot{r} = 0$

System hat nur noch 1 FG: φ

$\Rightarrow$ Gleichung (1) ist irrelevant

$$(m_1 + m_2) l^2 \ddot{\varphi} + (m_1 + m_2) g l \sin\varphi = 0$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin\varphi = 0$$

Dgl für mathematisches Pendel ✓

ii) $\varphi = 0 \quad \Rightarrow \dot{\varphi} = 0 \qquad \ddot{\varphi} = 0$

System hat nur noch 1 FG: r

Glg (2) ist irrelevant

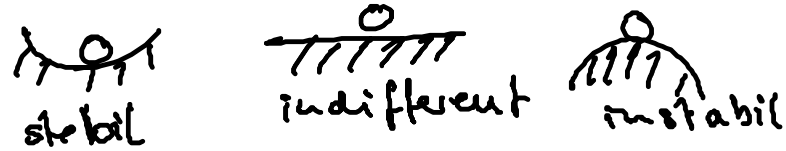
$$m_2 \ddot{r} - m_2 g + c(r - l_0) = 0$$

$$\underline{m_2 \ddot{r} + c r} = + m_2 g + c l_0$$

harmonischer Oszillator

iii) $\dot{\varphi} = 0 \qquad \ddot{\varphi} = 0 \qquad \dot{r} = 0 \qquad \ddot{r} = 0$

$$\frac{\partial U}{\partial q_i} = 0$$



(1) $-m_2 g \cos\varphi + c(r - l_0) = 0$

(2) $m_1 g l \sin\varphi + m_2 g r \sin\varphi = 0$

$$\sin\varphi(m_1 g l + m_2 g r) = 0$$

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1 &= 0 \\ \varphi_2 &= \pi \end{aligned}\right]$$

φ_1: $-m_2 g + c(r_1 - l_0) = 0 \Rightarrow r_1 = \frac{m_2 g}{c} + l_0$

φ_2: $m_2 g + c(r_2 - l_0) = 0 \Rightarrow r_2 = -\frac{m_2 g}{c} + l_0$